
O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(a)	$\times$	
(b)	$\times$	
(c)	$\times$	
(d)		$\times$
(e)		$\times$

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

   `[Porque` $\sqrt{2}$ `e` $\sqrt[3]{4}$ `são ambos algébricos sobre` $\mathbb{Q}$ `e a soma de quaisquer dois números algébricos ainda é um número algébrico:` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ `e, como` $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4}):\mathbb{Q}]=6$`, os 7 vectores 1,` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2,\ldots,(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6$ `de` $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ `são linearmente dependentes; isto significa que existem racionais` $a_0,a_1,\ldots,a_6$ `não todos nulos tais que` $a_0+a_1(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})+a_2(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2+\cdots+a_6(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6=0$`, ou seja,` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ `é raiz do polinómio não nulo` $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6\in\mathbb{Q}[x]$`.]`

   (b) O polinómio x^3+2x^2+2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.

   `[É irredutível pois não tem raízes em` $\mathbb{Z}_5$`.]`

   (c) $\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

   `[`$\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ `pois` $2\in\mathbb{Q}$ `e` $\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$`. A inclusão recíproca também é verdadeira pois` $\sqrt[3]{2}=\frac{(2+\sqrt[3]{4})^2}{2}-2-2\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})$`.]`

   (d) $-\theta^2+\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3-\theta+1=0$.

   `[`$\frac{\theta+1}{2}(-\theta^2+\theta)=\frac{1}{2}(-\theta^3+\theta^2-\theta^2+\theta)=\frac{1}{2}(-\theta^3+\theta)=\frac{1}{2}$`.]`

   (e) Um polígono regular de 7 lados pode ser construído com régua e compasso.

   `[7 não é um primo de Fermat.]`

2. Considere o polinómio $p(x)=8x^3-6x-1$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são: $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x]\}=\{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x], gr(a(x))\leq 2\}\\ &\cong \mathbb{Q}(\theta),\end{aligned}$$

   onde $8\theta^3-6\theta-1=0$. Como $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=3$.
