Os apontamentos que se seguem contêm as notas das aulas (e alguma informação complementar de apoio) da disciplina de Teoria Combinatória. Na sua elaboração seguimos de perto [3]. Inspirámo-nos ainda em [10], [9], [2], [7] e [1].

A Matemática Combinatória, nomeadamente a sua parte elementar (arranjos simples, permutações e combinações, binómio de Newton), além de fazer parte do programa do Ensino Secundário, onde constitui um auxiliar fundamental do cálculo de probabilidades elementar, tem certas aplicações interessantes (Geometria, Números, Jogos, Probabilidades) com ligação directa a temas dos programas dos ensino básico e secundário. O seu uso depende de grande habilidade enumerativa, baseada num conhecimento subtil da arte de contagem. Com os tópicos que abordaremos neste curso pretendemos dar uma visão geral sobre os métodos fundamentais da Teoria Combinatória, mostrando, através das técnicas introduzidas e dos exemplos apresentados, quão importante é hoje a Teoria Combinatória. Realça-se o aspecto formativo que esta teoria pode desempenhar no ensino e segue-se uma metodologia em estreita ligação à resolução de problemas (ilustrando como ao longo da sua história a Teoria Combinatória se tem desenvolvido fundamentalmente sob motivações práticas).

Entre os tópicos a abordar contam-se:

- Princípios de existência (revisão).
- Combinatória enumerativa
    - · Princípios básicos de contagem (revisão)
    - · Coeficientes binomiais
    - · Princípio da Inclusão-Exclusão
    - · Relações de recorrência
    - · Arte combinatória e probabilidades: arranjos, combinações e partições (sistematização de todos os casos); números de Stirling e números de Bell
    - · A tabela dos 12 caminhos
    - · Funções geradoras.

Como material de estudo, além destes apontamentos recomendamos os seguintes livros:

- C. André e F. Ferreira, *Matemática Finita*, Universidade Aberta, 2000. (05A/AND)[1]

[1] Entre parênteses indica-se a cota do livro na Biblioteca do DMUC.

- E. Lages Lima *et al*, *A Matemática do Ensino Médio*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. (00A05/Mat,2)
- R. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, North-Holland, 1977. (05-01/BRU)
- G. E. Martin, *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics*, Springer, 2001.
- H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Mathematical Association of America, 1963. (05B/RYS)

Podem ser encontradas mais informações sobre o curso (incluindo os sumários das aulas teóricas, algumas notas históricas, etc.) em

`http://www.mat.uc.pt/~picado/combinatoria/`

Índice

1. Introdução: O que é a Teoria Combinatória?

A Teoria Combinatória (ou, como por vezes também é apelidada, Matemática Combinatória ou Matemática Discreta) preocupa-se fundamentalmente com o estudo de conjuntos finitos ou discretos (como o conjunto dos inteiros) e diversas estruturas nesses conjuntos, tais como arranjos, combinações, configurações e grafos.

Genericamente, a Matemática Combinatória aborda três tipos de problemas que surgem no estudo de tais conjuntos e estruturas:

(A) Problemas de existência:

Existe algum arranjo de objectos de um dado conjunto satisfazendo determinada propriedade?

Exemplos:

(A1) Se num dado exame as notas foram dadas com aproximação até às décimas e a ele compareceram 202 alunos, existirão dois alunos com a mesma nota?

(A2) Escolham-se 101 inteiros entre os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 200$. Entre os inteiros escolhidos, existirão dois tais que um é divisor do outro?

(A3) Se 101 (resp. $n^2 + 1$) pessoas se encontrarem alinhadas lado a lado numa linha recta, será possível mandar dar um passo em frente a 11 (resp. $n + 1$) delas de tal modo que, olhando para este grupo da esquerda para a direita, as pessoas se encontrem por ordem crescente ou decrescente das suas alturas?

Ou seja, de uma sequência

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$$

de números reais, será possível extrair uma subsequência crescente ou decrescente com $n + 1$ elementos?

Por exemplo, a sequência $3, 2, 12, 8, 10, 1, 4, 11, 9, 7$ contém 10 termos. Note-se que $10 = 3^2 + 1$. Existem 2 subsequências crescentes de comprimento 4, nomeadamente $3, 8, 10, 11$ e $2, 8, 10, 11$. Existe também uma subsequência decrescente de comprimento 4 que é $12, 10, 9, 7$. Por outro lado, a sequência $3, 2, 12, 8, 10, 1, 4, 11, 7, 9$ já não contém nenhuma subsequência decrescente de comprimento 4. Em contrapartida, tem 5 subsequências crescentes de comprimento 4: $3, 8, 10, 11$; $3, 4, 7, 9$; $2, 8, 10, 11$; $2, 4, 7, 9$ e $1, 4, 7, 9$.

(A4) O Rio Pregel atravessa a cidade de Königsberg[2], na Prússia Oriental, dividindo-a em quatro regiões, como se pode ver na seguinte gravura[3] da cidade:

Conta-se que os habitantes de Königsberg se entretinham a tentar encontrar uma maneira de efectuar um passeio pela cidade, de modo a voltar ao ponto de partida, passando uma única vez por cada uma das 7 pontes. Como as suas tentativas saíram sempre goradas, muitos acreditavam ser impossível realizar tal trajecto. Contudo, só em 1736, com um artigo de L. Euler[4], o problema foi totalmente abordado de modo matemático, e tal impossibilidade foi provada. Vale a pena lermos os primeiros parágrafos desse artigo de Euler:

> *"1. Além do ramo da geometria que se preocupa com grandezas, e que sempre recebeu a maior atenção, existe outro ramo, quase desconhecido anteriormente, que Leibniz pela primeira vez mencionou, chamando-lhe 'geometria da posição'. Este ramo preocupa-*

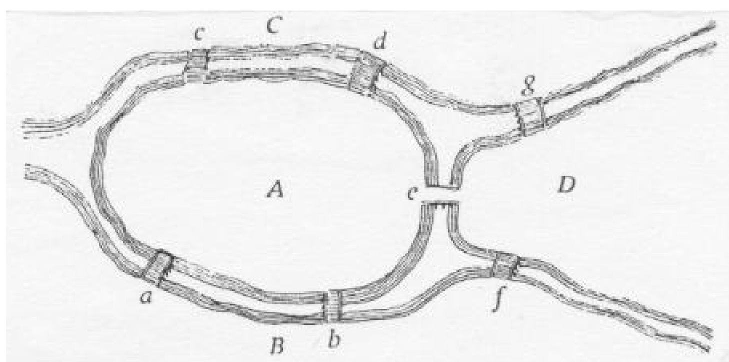
[2] Actualmente Kalininegrado, na Rússia.

[3] [M. Zeiller, *Topographia Prussiae et Pomerelliae*, Frankfurt, c. 1650], cópia em [2].

[4] No artigo [*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736) 128-140], baseado numa comunicação apresentada à Academia em 26 de Agosto de 1735, e considerado por muitos o nascimento da Teoria dos Grafos.

-se com a determinação de posições e suas propriedades; não envolve medidas, nem cálculos feitos com elas. Ainda não se determinou de modo satisfatório que tipo de problemas são relevantes para esta geometria de posição, ou que métodos deverão ser utilizados para os resolver. Portanto, quando um problema foi recentemente mencionado, que parecia geométrico mas era tal que não requeria medir distâncias, nem realizar cálculos, não tive dúvida que tinha a ver com a geometria de posição — fundamentalmente porque a sua solução envolvia somente posição, e nenhuns cálculos eram úteis. Decidi então apresentar aqui o método que encontrei para resolver este tipo de problema, como um exemplo da geometria de posição.

2. O problema, que me foi dito ser muito popular, é o seguinte: em Königsberg na Prússia, existe uma ilha A, chamada 'Kneiphof'; o rio que a rodeia divide-se em dois braços, como pode ser visto na figura, e estes braços são atravessados por sete pontes a, b, c, d, e, f *e* g.



Pergunta-se se alguém consegue encontrar um trajecto de tal modo que atravesse cada ponte uma e uma só vez. Foi-me dito que algumas pessoas afirmaram tal ser impossível, enquanto outras tinham dúvidas; mas ninguém assegurou que tal trajecto existe. A partir disto, formulei o problema geral: qualquer que seja o arranjo e a divisão do rio em braços, e qualquer que seja o número de pontes, pode-se concluir se é possível ou não atravessar cada ponte exactamente uma vez?

3. Quanto ao problema das 7 pontes de Königsberg, este pode ser resolvido fazendo uma lista exaustiva de todos os trajectos possíveis, e verificando se cada trajecto satisfaz ou não as condições do problema. Por causa do número de possibilidades, este método de resolução seria muito complicado e laborioso, e noutros problemas *com mais pontes totalmente impraticável. Além disso, se seguirmos este método até à sua conclusão, muitos trajectos irrelevantes serão encontrados, que é a razão da dificuldade deste método. Portanto rejeitei-o, e procurei outro, preocupado somente com o problema da existência do trajecto requerido; achei que um tal método seria mais simples."*[5]

(A5) Imagine uma prisão com 64 celas, dispostas como os quadrados de um tabuleiro de xadrez (com 8 linhas e 8 colunas). Imagine ainda que entre cada duas celas vizinhas existe uma porta. É proposta, ao prisioneiro colocado na cela de um dos cantos, a sua liberdade caso consiga chegar à cela do canto diagonalmente oposto, depois de passar por todas as outras celas uma única vez. Conseguirá o prisioneiro obter a sua liberdade?

(A6) Consideremos um tabuleiro de xadrez e algumas peças (idênticas) de dominó tais que cada uma cobre precisamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Será possível dispor 32 dessas peças no tabuleiro de modo a cobri-lo, sem sobreposição de peças?[6]

E se o tabuleiro tiver mn quadrados em m linhas e n colunas?

(B) Problemas de contagem (e enumeração):

Quantos arranjos desse tipo existem?

Por vezes será importante ainda enumerá-los e/ou classificá-los.

Exemplos:

(B1) O problema (A6) de existência de uma cobertura perfeita de um tabuleiro de xadrez é muito simples; rapidamente se constroem diversas coberturas perfeitas. É no entanto muito mais difícil proceder à sua contagem. Tal foi feito pela primeira vez em 1961 por M. E. Fisher[7]: são

$$12\,988\,816 = 2^4 \times (901)^2.$$

Para outros valores de m e n já poderá não existir nenhuma cobertura perfeita. Por exemplo, não existe nenhuma no caso $m = n = 3$. Para que valores de m e n existem? Não é difícil concluir que um tabuleiro $m \times n$ possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos números m ou n é par, ou equivalentemente, se e só se o número mn de quadrados do

[5] O resto do artigo pode ser lido em [2].

[6] Tal arranjo diz-se uma *cobertura perfeita* do tabuleiro por dominós.

[7] *Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice*, Physical Review 124 (1961) 1664-1672.

tabuleiro é par. Fischer determinou fórmulas gerais (envolvendo funções trigonométricas) para o cálculo do número exacto de coberturas perfeitas de um tabuleiro $m \times n$.

Este problema é equivalente a um problema famoso em Física Molecular, conhecido como o *Problema das moléculas diatómicas*[8].

(B2) Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\} \subseteq \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$. Quantos inteiros positivos, inferiores ou iguais a n, não são divisíveis por nenhum dos elementos de A? Quantos inteiros positivos inferiores a n são primos com n? Quantos números primos compreendidos entre 2 e $n \geq 2$ existem?

(B3) Um empregado de um restaurante, encarregue de guardar os n chapéus dos n clientes esqueceu-se de os identificar. Quando os clientes os pediram de volta, o empregado foi-os devolvendo de forma aleatória! Qual é a probabilidade de nenhum cliente receber o seu chapéu de volta?

O caso $n = 52$ deste problema é equivalente ao célebre *Problème des rencontres* proposto por Montmort em 1708:

> No chamado "jogo dos pares", as 52 cartas de um baralho são dispostas em linha, com o seu valor à vista. As cartas de um segundo baralho são dispostas também em linha por cima das outras. A pontuação é determinada contando o número de vezes em que a carta do segundo baralho coincide com a do primeiro sobre a qual foi colocada. Qual é a probabilidade de se obterem zero pontos?

(B4) O seguinte problema foi originalmente proposto por Leonardo de Pisa[9], mais conhecido por Fibonacci, no séc. XIII:

Suponhamos que, para estudar a reprodução profícua dos coelhos, colocámos um par de coelhos (sendo um de cada sexo) numa ilha. Passados dois meses, a fêmea deu à luz todos os meses um novo par de coelhos, de sexos opostos. Por sua vez, a partir dos dois meses de idade, cada novo par deu à luz um outro par, todos os meses. Quantos pares de coelhos existiam na ilha ao cabo de n meses, supondo que nenhum coelho morreu entretanto?

A população de coelhos pode ser descrita por uma *relação de recorrência*. No final do primeiro mês o número de pares de coelhos era 1. Como este par não reproduziu durante o segundo mês, no final deste o número de pares de coelhos continuou a ser 1. Durante o terceiro mês nasceu um novo par pelo que no final deste mês existiam 2 pares de coelhos. Durante o quarto

[8] Cf. [M. E. Fisher, *Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice*, Physical Review 124 (1961) 1664-1672].

[9] No seu livro *Liber Abacci* (literalmente, um livro sobre o ábaco), publicado em 1202.

mês só o par inicial deu origem a um novo par, logo no final do quarto mês existiam 3 pares de coelhos.

MÊS	Pares reprodutores	Pares jovens	Total de pares
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Denotemos por f_n o número de pares de coelhos existentes no final do mês n. Este número é claramente igual à soma do número de pares de coelhos existentes no final do mês anterior, ou seja f_{n-1}, com o número de pares de coelhos entretanto nascidos durante o mês n, que é igual a f_{n-2}. Portanto a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

para $n \geq 3$, sendo $f_1 = f_2 = 1$.

Esta sucessão é a famosa *sucessão de Fibonacci*, e os seus termos são chamados *números de Fibonacci*[10].

Claro que para responder totalmente ao problema de Fibonacci teremos de encontrar um método para determinar uma fórmula explícita para o número f_n a partir daquela relação de recorrência.

(C) Problemas de optimização:

De todos os possíveis arranjos, qual é o melhor de acordo com determinado critério?

Exemplos:

(C1) Em 1852, Francis Guthrie reparou que no mapa de Inglaterra os condados poderiam ser coloridos, usando somente quatro cores, de modo a que condados vizinhos tivessem cores diferentes. Através do seu irmão perguntou a De Morgan se quatro cores chegariam para colorir, naquelas condições, qualquer mapa. Em 1878, num encontro da Sociedade Matemática de Londres,

[10]Estes números aparecem em variadíssimos problemas. Prova da sua importância é a existência da revista *Fibonacci Quartely*, revista da *Fibonacci Association*.

A. Cayley perguntou se alguém conseguia resolver o problema. Assim teve origem o famoso *Problema das 4 cores*. Somente em 1976, K. Appel e W. Hagen da Universidade do Illinois (E.U.A.), o conseguiriam resolver, com uma demonstração polémica[11], com a ajuda imprescindível do computador, que executou rotinas durante mais de 1000 horas consecutivas!

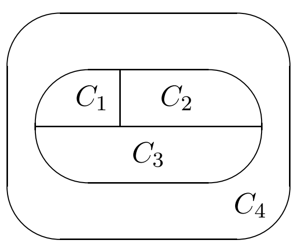
A demonstração deste resultado está muito longe de ser apresentável, pelo que nos limitamos a enunciar a solução[12]:

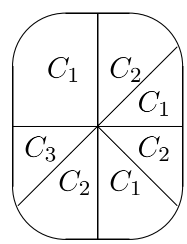
Em qualquer mapa sobre um plano ou uma esfera (representando um qualquer conjunto de regiões tais que, para quaisquer dois pontos numa mesma região, existe sempre um caminho, totalmente contido nessa região, ligando esses dois pontos), o menor número de cores necessárias para o colorir de tal modo que

- duas regiões *adjacentes* (ou seja, com um número infinito de pontos fronteiros comuns) não tenham a mesma cor

é 4.

Por exemplo,



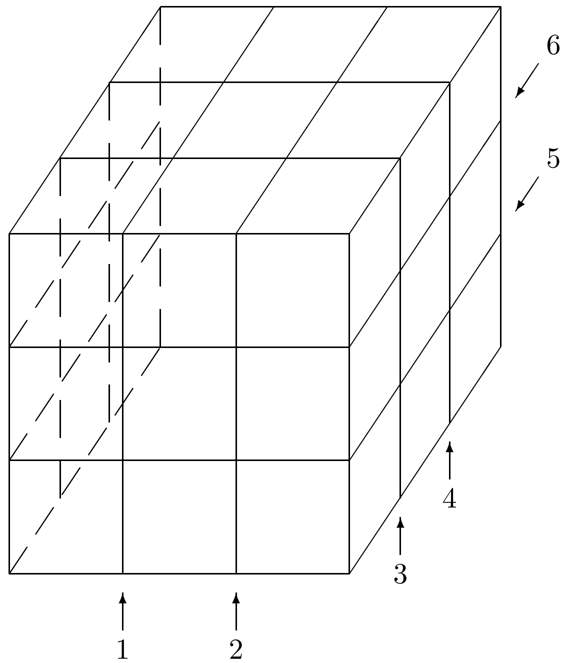


(C2) Consideremos um cubo de madeira com $3\,cm$ de lado. Se desejarmos cortar o cubo em 27 cubos de $1\,cm$ de lado, qual é o número mínimo de cortes em que tal pode ser realizado?

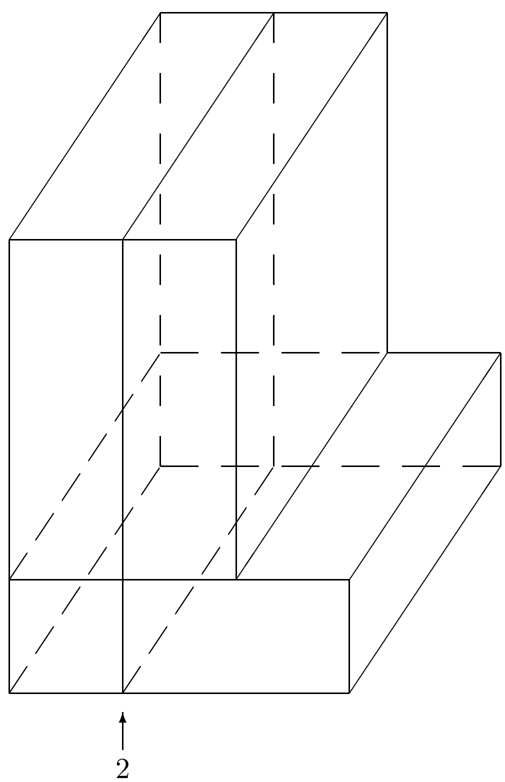
Uma maneira de cortar o cubo é fazendo 6 cortes, 2 em cada direcção (enquanto se mantém o cubo num só bloco):

[11] Para uma história mais completa das origens e resolução deste problema consulte [R. Fritsch e G. Fritsch, *The Four-Color Theorem*, Springer, 1998].

[12] K. Appel e W. Hagen, *Every planar map is four coulorable*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) 711-712.



Mas será possível realizar tal operação com menos cortes, se as peças puderem ser deslocadas entre cortes? Por exemplo, em



o segundo corte corta agora mais madeira do que cortaria se não tivessemos rearranjado as peças depois do primeiro corte. Parece, pois, um problema difícil de analisar. Olhemos no entanto para ele de outro modo. As 6 faces do cubo do meio só se conseguem obter com cortes (independentes). Portanto, são sempre necessários 6 cortes e fazer rearranjos das peças entre os cortes não ajuda nada.

Agora outro problema (este de contagem) surge naturalmente: de quantas maneiras diferentes pode o cubo ser cortado, realizando somente 6 cortes?

(C3) Suponha que se fazem n cortes numa *pizza*. Qual o número máximo de partes em que a *pizza* poderá ficar dividida?

(C4) A velocidade com que um gás flui através de uma tubagem depende do diâmetro do tubo, do seu comprimento, das pressões nos pontos terminais, da temperatura e de várias propriedades do gás. O desenho de uma rede de distribuição de gás envolve, entre outras decisões, a escolha dos diâmetros dos tubos, de modo a minimizar o custo total da construção e operação do sistema. A abordagem *standard* consiste em recorrer ao "bom senso" (método habitual da engenharia!) para a escolha de tamanhos razoáveis de tubagem e esperar que tudo corra pelo melhor. Qualquer esperança de fazer melhor parece, à primeira vista, não existir. Por exemplo, uma pequena rede com 40 ligações e 7 diâmetros possíveis de tubo, daria origem a 7^{40} redes diferentes. O nosso problema é o de escolher a rede mais barata de entre essas 7^{40} possibilidades (que é um número astronómico!). Trata-se assim de um problema de optimização, no qual procuramos o desenho (padrão ou arranjo) óptimo para um determinado desempenho.

Este problema, mesmo com o uso dos actuais computadores de grande velocidade, não parece tratável por exaustiva análise de todos os casos. Mesmo qualquer desenvolvimento esperado na velocidade daqueles não parece ter influência significativa nesta questão. Contudo, um procedimento simples implementado no Golfo do México[13], deu origem a um método que permite encontrar a rede óptima em $7 \times 40 = 280$ passos em vez dos tais 7^{40}, permitindo poupar alguns milhões de dólares. É um exemplo paradigmático das virtualidades da chamada Optimização Combinatória.

As origens da Teoria Combinatória datam do séc. XVII em estreita ligação com os jogos de azar e o cálculo das probabilidades; Pascal, Fermat, Jacob Bernoulli e Leibniz

[13]Cf. [H. Frank e I. T. Frisch, *Network Analysis*, Sci. Amer. 223 (1970) 94-103], [D. J. Kleitman, *Comments on the First Two Days' Sessions and a Brief Description of a Gas Pipeline Network Construction Problem*, em F. S. Roberts (ed.), Energy: Mathematics and Models, SIAM, Filadélfia, 1976, p. 239-252], [Rothfarb *et al.*, *Optimal Design of Offshore Natural-Gas Pipeline Systems*, Oper. Res. 18 (1970) 992-1020] e [N. Zadeh, *Construction of Efficient Tree Networks: The Pipeline Problem*, Networks 3 (1973) 1-32].

realizaram investigações de problemas combinatoriais relacionados com jogos de azar, constituindo estas as bases sobre as quais se desenvolveu o cálculo das probabilidades.

No séc. XVIII Euler fundou a Teoria dos Grafos com a resolução do famoso *problema das pontes de Königsberg* e James Bernoulli publicou o primeiro livro[14] contendo métodos combinatoriais.

Com o desenvolvimento dos computadores, a Matemática Combinatória tornou-se uma disciplina autónoma dentro da matemática moderna, das que mais se tem desenvolvido, tendo inúmeras aplicações a diversas áreas da matemática.

Exercícios

1.1 Mostre que um tabuleiro com $m \times n$ quadrados possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos valores m ou n é par.

1.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f(n)$ o número de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$. Calcule $f(1), f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$. Tente encontrar uma relação que seja satisfeita pela função f e que lhe permita calcular $f(12)$.

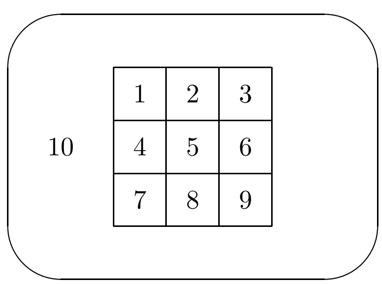
1.3 Determine o número de coberturas perfeitas distintas de um tabuleiro 3×4.

1.4 Seja n um inteiro positivo. Dizemos que uma *n-coloração* de um mapa é uma coloração de todas as regiões do mapa, usando n cores, de tal modo que regiões adjacentes (isto é, regiões com um número infinito de pontos fronteiros comuns) têm cores diferentes. Prove que:

(a) Um mapa formado no plano por um número finito de círculos possui uma 2-coloração.

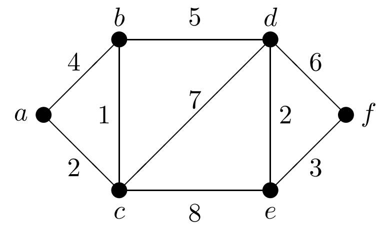
(b) Um mapa formado no plano por um número finito de linhas rectas também possui uma 2-coloração.

1.5 Mostre que o seguinte mapa de 10 países admite uma 3-coloração. Fixadas essas 3 cores, determine o número de colorações distintas possíveis.



1.6 Determine o caminho mais curto de a para f no mapa de estradas da figura

[14] *Ars Conjectandi.*



(Os valores junto de cada estrada representam os comprimentos destas, medidos numa determinada unidade.)

2. Problemas de existência

Vamos começar com um princípio combinatorial básico que, apesar de elementar, permite a resolução de muitos problemas, alguns surpreendentes.

2.1. Proposição. [**Princípio dos Pombais**] *Se* $n+1$ *objectos forem colocados em* n *caixas, pelo menos uma das caixas ficará com dois ou mais objectos.*

Demonstração. Faremos a demonstração por redução ao absurdo.

Suponhamos que em cada caixa ficava, no máximo, um objecto. Então o número de objectos seria no máximo n, o que contradiz a hipótese. Portanto alguma caixa conterá, pelo menos, dois objectos. ∎

Formulado em termos de pombos este princípio diz que se n pombos voarem para $n-1$ pombais, necessariamente um pombal será ocupado por dois ou mais pombos. Por exemplo, no caso de 13 pombos e 12 pombais,

	$\oint$ $\oint$ $\oint$	$\oint$
$\oint$		$\oint$
$\oint$ $\oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$

$\oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$ $\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$

$\oint$ $\oint$ $\oint$		$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$ $\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$ $\oint$
$\oint$		

são algumas configurações possíveis.

Solução do Problema (A2). Escolhendo 101 inteiros entre os inteiros $1, 2, \ldots, 200$, vamos aplicar o Princípio dos Pombais para mostrar que entre os inteiros escolhidos existem dois tais que um é divisor do outro[15].

Qualquer inteiro pode ser escrito na forma $2^k a$, com $k \in \mathbb{N}_0$ e a ímpar. Para qualquer inteiro entre 1 e 200, a é um dos números $1, 3, 5, \ldots, 199$. Logo, entre os 101 escolhidos, dois são da forma $2^{k_1}a_1$ e $2^{k_2}a_2$ com $a_1 = a_2$. Se $k_1 \leq k_2$ então $2^{k_1}a_1$ é divisor de $2^{k_2}a_2$. Caso $k_1 > k_2$, $2^{k_2}a_2$ é divisor de $2^{k_1}a_1$. ∎

Vamos agora apresentar uma forma mais geral do Princípio dos Pombais.

[15] Este raciocínio também vale para uma escolha de $n+1$ inteiros entre os números $1, 2, \ldots, 2n$.

2.2. Proposição. *Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ inteiros positivos. Se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com p_i ou mais objectos, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstração. Suponhamos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a i-ésima caixa ficava com, no máximo, $p_i - 1$ elementos. Então o número total de objectos não excederia

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \cdots + (p_n - 1) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n,$$

o que é absurdo. Logo existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que a i-ésima caixa conterá pelo menos p_i objectos. ∎

2.3. Observações.

(a) Se $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 2$ obtemos a Proposição 2.1.

(b) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que "*se $n(r-1)+1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com r ou mais objectos*".

Por exemplo, no problema (A1), como o número de caixas é igual ao número de notas possíveis, ou seja, 201, podemos assegurar que se comparecerem $201(r-1)+1 = 201r - 200$ alunos ao exame, r de entre eles terão a mesma nota.

(c) Sejam $q_1, q_2, \ldots, q_n$ inteiros positivos. Suponhamos que a sua média aritmética

$$\frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{n}$$

é superior a $r-1$, com $r \in \mathbb{N}$. Nesse caso $\sum_{i=1}^{n} q_i > n(r-1)$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} q_i \geq n(r-1)+1$. Consequentemente, pela observação anterior, se distribuirmos $\sum_{i=1}^{n} q_i$ objectos por n caixas, sabemos que uma das caixas ficará com r objectos, pelo menos. Isto quer dizer que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $q_i \geq r$. Acabámos assim de provar que:

> *Se $q_1, q_2, \ldots, q_n$ são inteiros positivos tais que a sua média aritmética é superior a $r-1$ ($r \in \mathbb{N}$), pelo menos um desses inteiros é maior ou igual a r.*

Solução do Problema (A3). Provemos, utilizando a Observação 2.3 (b), que de uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ de números reais é possível extrair uma subsequência crescente ou decrescente com $n+1$ elementos.

Suponhamos que não existe nenhuma subsequência crescente com $n+1$ elementos. Para $k \in \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$ seja m_k o número de elementos da maior subsequência crescente que começa em a_k. É evidente que, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$, $m_k \geq 1$ e $m_k \leq n$. Temos então n^2+1 inteiros, $m_1, m_2, \ldots, m_{n^2+1}$, entre 1 e n. Como $n(r-1)+1 = n^2+1$ para $r = n+1$, podemos concluir que $n+1$ desses inteiros são iguais entre si. Sejam eles $m_{k_1}, m_{k_2}, \ldots, m_{k_{n+1}}$, onde $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2+1$. Se existisse algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$, seria possível construir uma subsequência crescente começando em a_{k_i} com $m_{k_{i+1}}+1$ elementos, o que é absurdo uma vez que $m_{k_i} = m_{k_{i+1}}$. Consequentemente,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_{n+1}},$$

isto é, $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ é uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos.

Mostrámos assim que existe uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos. ∎

Em particular, nos primeiros 101 números naturais, dispostos por qualquer ordem, será sempre possível encontrar 11 números que formam ou uma sequência crescente ou uma sequência decrescente. Isto já não acontece se tomarmos apenas os primeiros 100 números naturais. Como se poderá ordenar esses números de forma a não ser possível encontrar a desejada sequência de 11? Bastará começar com 91, 92, 93 até 100, depois 81, 82, 83 até 90 e assim sucessivamente:

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Terminamos com um exemplo que mostra como o Princípio dos Pombais pode ser aplicado a um ramo importante da Combinatória, chamado Teoria de Ramsey.

2.4. Proposição. *Suponhamos que num grupo de seis pessoas, cada par de indivíduos consiste em dois amigos ou dois inimigos. Então existem três amigos comuns ou três inimigos comuns no grupo.*

Demonstração. Seja A um dos seis elementos do grupo. Dos cinco restantes, se os dividirmos pelo grupo dos amigos de A e pelo grupo dos inimigos de A, como

$5 = 2(3-1)+1$, podemos concluir, novamente pela Observação 2.3(b), que um desses grupos conterá três ou mais elementos. Se tal grupo for o dos amigos de A denotemos por B, C e D três desses amigos. Se acontecer que dois deles sejam amigos entre si, então estes dois e A formam um grupo de três amigos comuns. Senão B, C e D formam um grupo de três inimigos comuns.

O caso em que o grupo que contém pelo menos três elementos é o dos inimigos de A pode provar-se de modo análogo. ■

Exercícios

2.1 Quantos estudantes, cada um dos quais proveniente de um dos 22 distritos de Portugal, deverão ser admitidos na Universidade de Coimbra de modo a garantir que existam pelo menos 100 que provenham do mesmo distrito?

2.2 Suponha que em Portugal há 6 000 000 de trabalhadores que têm salários a variar entre 50 000$00 e 400 000$00. Assumindo que todos ganham um número inteiro de escudos, determine o número máximo de trabalhadores que pode afirmar (com toda a certeza) auferirem o mesmo salário.

2.3 A bordo de um Concorde vão 201 pessoas de 5 nacionalidades diferentes. Sabe-se que em cada grupo de 6 pessoas, pelo menos 2 têm a mesma idade.

Mostre que no avião há, pelo menos, 5 pessoas do mesmo país, da mesma idade e do mesmo sexo.

2.4 Um saco contém 53 bolas de 4 cores: verde, azul, vermelho, branco. Mostre que:

(a) Se exactamente 8 bolas são azuis então existem pelo menos 15 da mesma cor;

(b) Se pelo menos 8 bolas são azuis então existem pelo menos 14 da mesma cor.

2.5 Prove que, em qualquer quadrilátero inscrito numa circunferência de raio 1, o comprimento do menor lado não excede $\sqrt{2}$.

2.6 No interior de um quadrado de lado 1 ou sob a sua fronteira, marcam-se cinco pontos. Mostre que há dois pontos a uma distância inferior ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.7 Quantas pessoas devem ser escolhidas de modo a garantir que, no mínimo, duas têm:

(a) A mesma inicial. E se quisermos garantir 3 pessoas com a mesma inicial?

(b) O mesmo dia de aniversário.

(c) Os mesmos 3 últimos algarismos do B.I.

2.8 Uma escola de música possui no total 45 alunos, que se dedicam ao estudo de 8 tipos diferentes de instrumentos. Sabendo que cada aluno executa exactamente um instrumento e que não há mais de 10 alunos que executem o mesmo instrumento, mostre que há, pelo menos, 3 tipos de instrumentos musicais, cada um dos quais é executado por 5 ou mais alunos.

2.9 Mostre que, se marcarmos sete pontos num disco de raio 1 tais que nenhum desses pontos esteja a uma distância, relativamente a outro, inferior a 1, então um dos pontos estará no centro do disco e os outros seis formam um hexágono regular na circunferência do disco.

2.10 Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 a 999. Se tirarmos ao acaso k cartões da caixa e calcularmos, para cada cartão, a soma dos algarismos nele escritos, qual é o valor mínimo que deve ter k para termos a certeza de encontrar pelo menos três cartões cujas somas dos algarismos sejam iguais?

2.11 Mostre que, entre quaisquer n inteiros positivos, existe um subconjunto deles cuja soma é divisível por n.

2.12 Poderá o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$ conter um subconjunto de 2000 elementos tais que nenhum deles é o dobro de outro?

2.13 Prove que, num grupo com duas ou mais pessoas, há sempre duas delas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo.

3. Princípios fundamentais de contagem

Neste capítulo abordaremos os dois princípios gerais, intuitivamente claros, que fundamentam os raciocínios básicos que se fazem na resolução de problemas elementares de contagem.

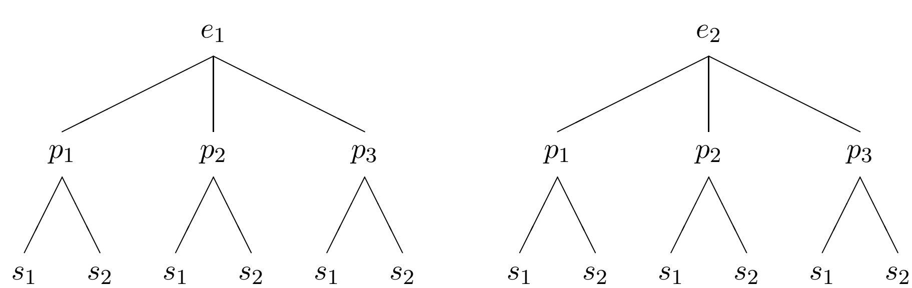
O princípio fundamental da contagem (chamado *princípio da multiplicação*) diz que se há p modos de fazer uma escolha E_1 e, feita a escolha E_1, há q modos de fazer a escolha E_2, então o número de maneiras de fazer sucessivamente as escolhas E_1 e E_2 é pq.

Mais geralmente:

> *Quando pretendemos realizar m escolhas múltiplas e existem p_1 possibilidades para a primeira escolha, p_2 possibilidades para a segunda escolha, etc., p_m possibilidades para a m-ésima escolha então se as escolhas forem combinadas livremente, o número total de possibilidades para o conjunto total das escolhas é $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$.*

3.1. Exemplo. O menu de um restaurante apresenta duas entradas, três pratos principais e duas sobremesas. Quantas ementas diferentes (com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa) podemos fazer?

Num problema tão simples podemos esquematizar as várias possibilidades e contá-las; se designarmos por $E = \{e_1, e_2\}$ o conjunto das entradas, por $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ o conjunto dos pratos principais e por $S = \{s_1, s_2\}$ o conjunto das sobremesas, o seguinte quadro mostra os resultados possíveis:



Portanto, $2 \times 3 \times 2 = 12$ é a solução do problema.

A justificação para o Princípio da Multiplicação é a seguinte:

Fazer a escolha E_1 significa escolher um elemento de um conjunto S_1 de cardinal p_1, fazer a escolha E_2 significa escolher um elemento de um conjunto S_2 de cardinal p_2, e assim sucessivamente, pelo que fazer a escolha sucessiva $E_1, E_2, \cdots, E_m$ significa tomar um elemento do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$. Logo o número de maneiras de fazer tal escolha é igual ao cardinal $|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m|$. Portanto o Princípio da Multiplicação assenta no seguinte facto, facilmente demonstrável por indução:

3.2. Proposição. **[Princípio da Multiplicação]** *Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m$ conjuntos finitos e $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ o seu produto cartesiano. Então $|S| = |S_1| \times |S_2| \times \cdots \times |S_m|$.*

Por outro lado, é evidente que o número de maneiras diferentes de escolher uma entrada ou um prato principal ou uma sobremesa é igual a $2+3+2 = 7$. Este raciocínio é um caso particular do chamado Princípio da Adição:

3.3. Proposição. **[Princípio da Adição]** *Se $S_1, S_2, \ldots, S_m$ formarem uma partição de um conjunto finito S, ou seja, se $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$, então $|S| = \sum_{i=1}^{m} |S_i|$.*

Caso alguns dos subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_m$ tenham intersecção não vazia, um princípio mais geral (o chamado Princípio da Inclusão-Exclusão) será necessário para contar os elementos de S. Estudaremos esse princípio no Capítulo 4. Os princípios da multiplicação e da adição podem ser facilmente demonstrados pelo Princípio de Indução Matemática.

3.4. Exemplos. (1) Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, amarela e vermelha. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. Portanto a resposta é $3 \times 2^6 = 192$.

(2) Quantos são os números de três algarismos distintos?

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual ao primeiro e segundo algarismos. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Estes exemplos mostram-nos qual deve ser a estratégia para resolver problemas de contagem. Citando [6]:

> 1) *Postura.* Devemos sempre colocar-nos no papel da pessoa que deve fazer a acção solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No

Exemplo 3.4(2), colocámo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três algarismos; no Exemplo 3.4(1), colocámo-nos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira.

2) *Divisão*. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos.

3) *Não adiar dificuldades*. Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 3.4(2), a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar; postergá-la só serve para causar problemas. Com efeito, começando a escolha dos algarismos pelo último, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo. Isto mostra como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

3.5. Exemplo. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0,2,4,6 ou 8. Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher este algarismo? A resposta é “depende”: se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última posição; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira posição.

Este tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para ultrapassá-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0. A resposta final é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que tiver sido contado indevidamente. Em primeiro lugar fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira posição do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0,2,4,6, ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí incluídos os que começam por 0. Por fim vamos determinar quantos desses números começam por 0; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2,4,6, ou 8 — lembre-se que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0. A resposta é $360 - 32 = 328$.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três algarismos distintos, poderíamos calcular os números de três algarismos distintos menos os números ímpares de três algarismos distintos.

Para os números de três algarismos distintos, há 9 modos de escolher o primeiro algarismo, 9 modos de escolher o segundo e 8 modos de escolher o último. Portanto há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três algarismos distintos.

Para os números ímpares de três algarismos distintos, há 5 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três algarismos distintos.

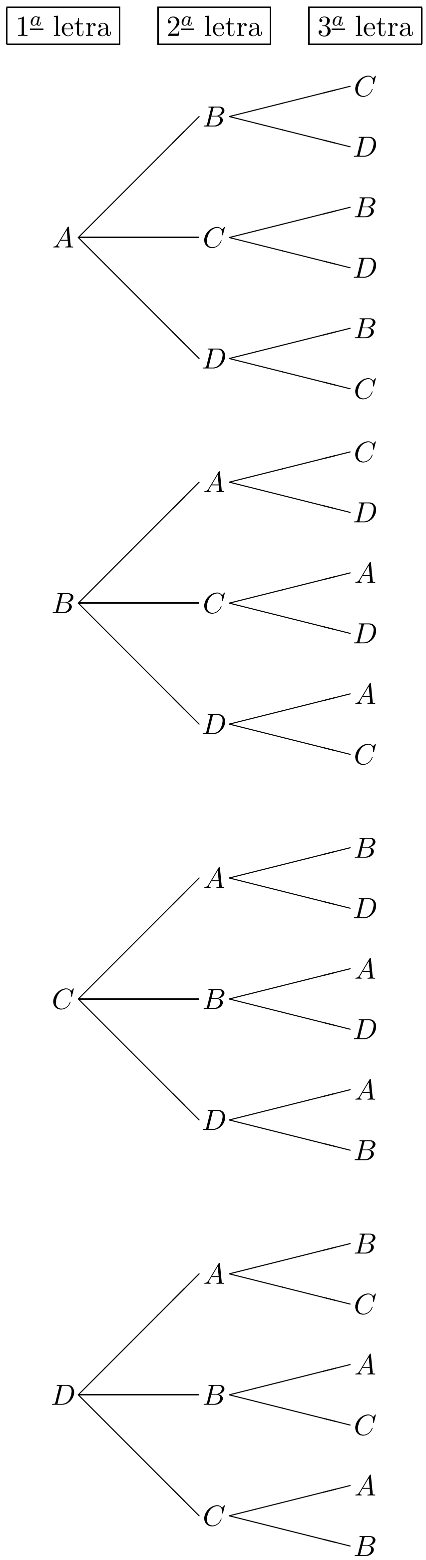
A resposta é $648 - 320 = 328$.

Há alguns problemas de Combinatória que, embora sejam aplicações do Princípio da Multiplicação, aparecem com muita frequência. Para esses problemas, vale a pena saber de cor as suas respostas.

(1) De um conjunto de 4 letras $\{A, B, C, D\}$, quantas sequências de 3 letras se podem formar se repetições de uma mesma letra não forem permitidas?

(2) Considere 4 pontos A, B, C, D num plano, tais que nenhum grupo de 3 esteja situado sobre uma mesma recta. Quantos triângulos diferentes podem ser construídos usando esses pontos como vértices?

No primeiro problema temos $4 \times 3 \times 2$ hipóteses diferentes:



Note-se que neste caso a ordem pela qual se escrevem as letras na sequência é fundamental:

$$ABC \neq BAC \neq CAB.$$

No segundo problema já a ordem não interessará pois, por exemplo, as sequências de vértices

$$ABC,\ BAC,\ CAB$$

definem o mesmo triângulo (o que define um triângulo é o conjunto dos seus três vértices, e não a ordem pela qual os poderemos escrever).

Estes dois problemas revelam-nos duas estruturas diferentes, que ocorrem frequentemente, e que abordaremos de seguida, de uma maneira mais formal e sistemática.

Seja S um conjunto com n elementos. Um *arranjo dos n elementos de S, r a r* $(0 < r \leq n)$ é uma sequência ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de elementos de S.

Assumimos que não há repetição de elementos nas sequências ordenadas. Denotaremos o número de arranjos dos n elementos de S, r a r, por A_r^n. Se $r = n$ diremos simplesmente que se trata de *arranjos de S* ou *permutações de n elementos*.

No exemplo (1) acima pedia-se o cálculo de A_3^4, que vimos ser igual a 24. Seja $S = \{a, b, c\}$. Os arranjos dos 3 elementos de S, 2 a 2, são

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b).$$

Logo $A_2^3 = 6$. Os arranjos de 3 elementos são $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ e (c, b, a) pelo que $A_3^3 = 6$.

3.6. Proposição. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$,*

$$A_r^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1).$$

Demonstração. O primeiro elemento da sequência ordenada pode ser escolhido de entre n elementos diferentes. O segundo de entre $n-1$, e assim sucessivamente, até ao elemento na r-ésima posição que poderá ser escolhido de entre $n-(r-1) = n-r+1$ elementos diferentes. Logo, pelo Princípio da Multiplicação, a construção da sequência pode ser realizada de $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$ maneiras diferentes, ou seja, $A_r^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$. ∎

Denotaremos por $n!$ o produto $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ dos primeiros n números naturais. Convencionando que $0! = 1$, podemos reescrever a Proposição 3.6 do seguinte modo:

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (n \geq r > 0).$$

Esta fórmula continua válida para $r = 0$ se definirmos A_0^n $(n \geq 0)$ como sendo igual a 1 (correspondendo ao arranjo vazio). O caso particular $r = n$ diz-nos que o número A_n^n de permutações de n elementos é igual a $n!$.

Exemplo. O número de pontos de $\mathbb{R}^2$ que não pertencem à recta $y = x$ e cujas coordenadas pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ é igual a $A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \times 4 = 20$.

Seja S um conjunto com n elementos. Uma *combinação dos n elementos de S, r a r*, com $0 < r \leq n$, é um subconjunto de S com r elementos (distintos, evidentemente).

Denotaremos o número de combinações de n elementos, r a r, por C_r^n ou $\binom{n}{r}$.

Exemplo. As combinações dos elementos de $S = \{a, b, c\}$, dois a dois, são $\{a, b\}, \{a, c\}$ e $\{b, c\}$. Portanto $C_2^3 = 3$. As combinações dos elementos de S três a três reduzem-se a $\{a, b, c\}$. Logo $C_3^3 = 1$.

3.7. Proposição. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$ temos*

$$C_r^n = \frac{A_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Demonstração. Seja S um conjunto com n elementos. Cada arranjo dos elementos de S, r a r, pode ser obtido em 2 passos:

(1) Seleccionando um subconjunto de S com r elementos;

(2) Reordenando esses r elementos de modo a formar o arranjo desejado.

Como C_r^n representa o número de subconjuntos de S com r elementos, podemos efectuar o passo (1) de C_r^n maneiras diferentes. Uma vez seleccionado um determinado subconjunto de r elementos, estes podem ser reordenados de $A_r^r = r!$ maneiras diferentes. Atendendo ao Princípio da Multiplicação, concluímos que $A_r^n = C_r^n \times r!$, isto é,

$$C_r^n = \frac{A_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad \blacksquare$$

Note-se que $C_n^n = 1$ e $C_1^n = n$. Convencionando que $C_0^n = 1$ para $n \geq 0$ a fórmula de 3.7 continua válida para $n \geq r = 0$.

Exemplo. 25 pontos de um plano, não havendo 3 colineares, definem $C_2^{25} = 300$ rectas.

Os números $\binom{n}{r} = C_r^n$ chamam-se números (ou coeficientes) binomiais (por razões que serão óbvias mais à frente) e têm muitas propriedades importantes (e fascinantes!). Em fórmulas que aparecem na análise de algoritmos, em problemas de probabilidades, etc., estes números ocorrem variadas vezes, revelando-se uma necessidade saber manipulá-los.

Da Proposição 3.7 conclui-se imediatamente que:

3.8. Corolário. *Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n$ tem-se* $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. ■

3.9. Corolário. **[Fórmula de Pascal**[16]**]** *Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n-1$ tem-se*

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$ ■

Utilizando a Fórmula de Pascal e observando que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, podemos imediatamente calcular os números $\binom{n}{r}$ para $0 \leq r \leq n$, sem necessitar de utilizar a Proposição 3.7. Dispondo esses números do seguinte modo

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

obtemos o chamado *Triângulo de Pascal*[17].

Muitas das relações envolvendo coeficientes binomiais podem ser descobertas através da simples observação do Triângulo de Pascal. Por exemplo:

[16] Esta é a designação comum para esta lei, mas o resultado já tinha sido anteriormente descoberto pelo algebrista alemão Michael Stifel (1487?-1567).

[17] Pascal, Blaise (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês.

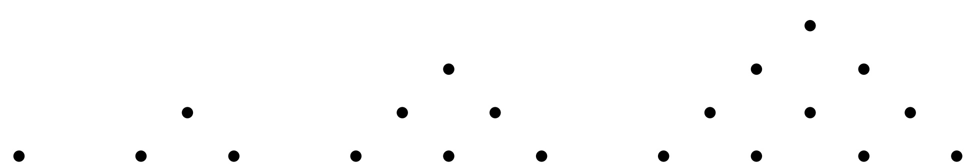
(1) Se adicionarmos os elementos em cada linha n obtemos o valor 2^n, ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad \text{(Teorema das Linhas)}$$

Sendo S um conjunto com n elementos, como $\binom{n}{r}$ é o número de subconjuntos de S com r elementos, então podemos concluir que o número de subconjuntos de S é igual a 2^n.

(2) Facilmente se observa, pela simetria em cada linha, que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (Corolário 3.8).

(3) Na terceira coluna aparecem os chamados *números triangulares*, correspondentes ao número de pontos das seguintes figuras triangulares:



1 3 6 10

A validade destas identidades pode depois ser facilmente verificada utilizando o Princípio de Indução Matemática.

3.10. Teorema. [Teorema Binomial ou Fórmula do Binómio de Newton[18]] *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

Demonstração. Quando efectuamos a multiplicação

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

até não restarem mais parênteses, cada um dos factores $(x+y)$ contribui com um x ou um y para cada parcela. Resultam portanto 2^n parcelas e cada uma delas pode ser escrita na forma $x^r y^{n-r}$ para algum $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Obtemos a parcela $x^r y^{n-r}$ escolhendo x em r dos factores e y nos restantes $n-r$. Então o número de vezes que a parcela $x^r y^{n-r}$ ocorre na expansão é igual ao número de maneiras diferentes

[18]Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês.

de seleccionar r dos n factores $(x+y)$, ou seja, ao número $\binom{n}{r}$ de combinações de n elementos r a r. ∎

O Teorema Binomial justifica a designação de coeficientes binomiais para os números $\binom{n}{r}$. Note-se que a fórmula do binómio ainda é válida para $n = 0$.

O Teorema Binomial pode alternativamente ser demonstrado por indução sobre o número n de factores $(x+y)$, requerendo somente a utilização da Fórmula de Pascal. Deixamo-la como exercício para o leitor.

De 3.10 podemos obter, como casos particulares, algumas identidades úteis. Por exemplo:

Para $x = 1$ e $y = 1$,

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \text{ , para } n \geq 0. \tag{3.10.1}$$

Para $y = 1$,

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r \text{ , para } n \geq 0. \tag{3.10.2}$$

Para $x = -1$ e $y = 1$,

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \text{ , para } n \geq 1. \tag{3.10.3}$$

Podemos ainda obter mais identidades envolvendo os coeficientes binomiais, por derivação e integração. Por exemplo:

(1) $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$, para $n, r \in \mathbb{N}$ com $0 < r \leq n$.

(2) $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$, para $n \in \mathbb{N}$.

(4) $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$, para $n \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

(1) Imediato se recorrermos ao facto $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

(2) Derivando a identidade (3.10.2) obtemos

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} x^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} x^{r-1}. \tag{3.10.4}$$

Fazendo $x = 1$ vem $n2^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}$.

(3) De (3.10.4) podemos concluir que $nx(x+1)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}x^r$. Voltando a derivar obtemos

$$n(x+1)^{n-1} + n(n-1)x(x+1)^{n-2} = \sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} x^{r-1}.$$

Tomando $x = 1$ vem

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r},$$

isto é, $n(n+1)2^{n-2} = \sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r}$.

(4) Seja S um conjunto com $2n$ elementos. Vamos provar que o número $\binom{2n}{n}$ das combinações dos elementos de S, n a n, é igual a $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$. Consideremos então uma partição $A \cup B$ de S em dois subconjuntos disjuntos, com n elementos cada. Toda a combinação dos $2n$ elementos de S, n a n, é a união de uma combinação dos n elementos de A, r a r, com uma combinação dos n elementos de B, $n-r$ a $n-r$, tomando r os valores $0, 1, \ldots, n$. Pelo Princípio da Multiplicação, para cada $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, este número é dado por $\binom{n}{r} \times \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}^2$. Logo, pelo Princípio da Adição, $\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$, com $n \in \mathbb{N}$.

É evidente que $\sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r}^2 = 1 = \binom{2-0}{0}$, o que termina a demonstração. ∎

Em resumo, temos à disposição vários métodos que podemos usar para obter identidades envolvendo os números binomiais:

(1) Definição;

(2) Indução matemática;

(3) Triângulo de Pascal;

(4) Fórmula de Pascal;

(5) Argumentos combinatoriais;

(6) Teorema Binomial, incluindo derivação e integração.

O Teorema Binomial dá-nos uma fórmula para o desenvolvimento de $(x+y)^n$ com $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Em 1676, Newton generalizou-o, obtendo um desenvolvimento para $(x+y)^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Para se obter esta forma é necessário estender o domínio de definição dos números binomiais $\binom{n}{r}$, permitindo que $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Z}$. Neste caso geral o desenvolvimento torna-se uma série infinita e consequentemente algumas questões de convergência se levantam, por isso não vamos sequer enunciar esse resultado.

O Teorema Binomial pode também ser estendido de modo a dar-nos uma fórmula para $(x+y+z)^n$ ou, mais geralmente, para a n-ésima potência da soma de t números reais $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$. Nesta fórmula geral, como veremos já de seguida, o papel dos coeficientes binomiais é desempenhado pelos números

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!},$$

onde $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0$ são tais que $n_1+n_2+\cdots+n_t = n$. Coerentemente, designam-se estes números por *números (ou coeficientes) multinomiais*, que se denotam habitualmente por

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} \text{ ou } C^n_{n_1,n_2,\dots,n_t}.$$

Note-se que

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

3.11. Teorema. **[Teorema Multinomial]** *Para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t},$$

onde o somatório se estende a todas as sequências $n_1, n_2, \dots, n_t$ de inteiros não negativos tais que $n_1+n_2+\cdots+n_t = n$.

Demonstração. Generalizando a demonstração que apresentámos do Teorema Binomial, podemos facilmente demonstrar este resultado:

Quando efectuamos a multiplicação dos n factores $(x_1+x_2+\cdots+x_t)$ até não restarem parênteses, cada um deles contribui com um dos elementos $x_1, x_2, \dots, x_t$ para cada parcela do desenvolvimento. Daí resultam t^n parcelas, cada uma podendo ser escrita na forma $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$, com $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0$ satisfazendo $n_1+n_2+\cdots+n_t = n$. Obtemos a parcela $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ escolhendo x_1 em n_1 dos factores, escolhendo x_2 em n_2 dos $n-n_1$ factores restantes, e assim sucessivamente, até à escolha de x_t nos $n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1} = n_t$ factores restantes. Então, pelo Princípio da Multiplicação, esta parcela aparece

$$C^n_{n_1} \times C^{n-n_1}_{n_2} \times \cdots \times C^{n-n_1-\cdots-n_{t-1}}_{n_t}$$

vezes no somatório final. Mas este número é igual a

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \cdots \times \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1})!}{n_t!(n-n_1-n_2-\cdots-n_t)!},$$

ou seja,

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}.$$

∎

Exemplos.

(a) $(x_1+x_2+x_3)^3$ é, pelo Teorema Multinomial, igual a $\frac{3!}{3!0!0!}x_1^3x_2^0x_3^0+\frac{3!}{2!1!0!}x_1^2x_2x_3^0+\frac{3!}{2!0!1!}x_1^2x_2^0x_3+\frac{3!}{1!0!2!}x_1x_2^0x_3^2+\frac{3!}{1!1!1!}x_1x_2x_3+\frac{3!}{1!2!0!}x_1x_2^2x_3^0+\frac{3!}{0!0!3!}x_1^0x_2^0x_3^3+\frac{3!}{0!1!2!}x_1^0x_2x_3^2+\frac{3!}{0!2!1!}x_1^0x_2^2x_3+\frac{3!}{0!3!0!}x_1^0x_2^3x_3^0$, ou seja, igual a

$$x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_1x_3^2+6x_1x_2x_3+3x_1x_2^2+x_3^3+3x_2x_3^2+3x_2^2x_3+x_2^3.$$

(b) O coeficiente de $x_1^2x_3x_4^3x_5$ no desenvolvimento de $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$ é

$$\binom{7}{2,0,1,3,1}=\frac{7!}{2!3!}=420.$$

(c) O coeficiente de $x_1^3x_2x_3^2$ no desenvolvimento de $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ é

$$\binom{6}{3,1,2}\times 2^3\times(-3)\times 5^2=-36000.$$

Terminamos este capítulo com alguns conselhos *sobre o Ensino de Combinatória*, citados de ([6], p. 111-112):

- Não use fórmulas em demasia ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Na maioria dos casos, as fórmulas são desnecessárias e substituídas, com vantagem, pelo uso consciente das definições e dos princípios fundamentais. Quem troca o princípio básico da multiplicação por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldade em resolver até mesmo o nosso segundo exemplo (3.4(1), o das bandeiras). Os professores deverão ensinar os alunos a fazer uso inteligente do Princípio da Multiplicação, ao invés de recorrer a uma profusão de fórmulas, cujo uso é muitas vezes confuso para o aluno ("Professor, aqui eu uso arranjos ou combinações?").

- Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? Como se resolveriam, por exemplo, os problemas dos exemplos 3.4? Aliás, para que servem os arranjos?

- Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque está errada.

- Você quer mostrar que é bom ou quer que os seus alunos aprendam? Se prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar a solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema.

Sendo mais específico: no Exemplo 3.5, foram apresentados dois métodos e um truque. Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem domina os métodos.

A Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos.

- Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, os seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.

  Por exemplo, no seguinte problema, a primeira solução apresentada é melhor do que a segunda para educar o raciocínio do aluno.

  Tem-se 5 pontos sobre uma recta R e 8 pontos sobre uma recta R' paralela a R. Quantos triângulos e quantos quadriláteros convexos com vértices nesses pontos existem?

  Para formarmos um triângulo ou tomamos um ponto em R e dois pontos em R', ou tomamos um ponto em R' e dois pontos em R. O número de triângulos é $5 \times \binom{8}{2} + 8 \times \binom{5}{2} = 140 + +80 = 220$.

  Também se poderia pensar em tomar 3 dos 13 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que daria

  $$\binom{13}{3} - \binom{8}{3} - \binom{5}{3} = 286 - 56 - 10 = 220.$$

  Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em R e dois pontos em R', o que pode ser feito de $\binom{5}{3} \times \binom{8}{2} = 10 \times 28 = 280$ modos.

Exercícios

3.1 A *password* de um computador é formada por uma letra seguida de 3 ou 4 algarismos. Qual é o número total de *passwords* que é possível formar?

3.2 Dizemos que um número é *equilibrado* caso um dos seus algarismos seja a média dos outros. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

3.3 Dizemos que um número natural é *ascendente* se cada um dos seus algarismos é estritamente maior do que qualquer um dos algarismos colocados à sua esquerda. Por exemplo, o número 3589 é ascendente. Quantos números ascendentes existem entre 4000 e 5000?

3.4 A um número como 19977991, que lido da direita para a esquerda, coincide com o número original, chama-se *capicua*. Quantas capicuas de 7 algarismos, com 4 algarismos diferentes, existem?

3.5 O Carlos atribuiu a cada um dos seus livros um código, formado por 3 das 23 letras do nosso alfabeto, pela seguinte ordem:

$$AAA, AAB, \ldots, AAZ, ABA, ABB, \ldots, ABZ, \ldots, AZA, AZB, \ldots, AZZ, BAA, BAB, \ldots$$

Sabendo que o Carlos tem 2203 livros, qual é o código que ele utilizou para catalogar o último livro da sua colecção?

3.6 Se escrevermos numa folha de papel todos os números de 1 até 1997, quantas vezes escrevemos o algarismo 7?

3.7 Os quadrados dos números naturais são escritos uns a seguir aos outros:

$$1491625364964\cdots$$

Qual o algarismo que aparecerá na $100^{\underline{a}}$ posição?

3.8 Chamemos *número simples* a um número inteiro positivo formado apenas pelos algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números simples existem, inferiores a um milhão?

3.9 Calcule o número de equipas de 8 jogadores que é possível formar com 3 portugueses e não mais do que 2 brasileiros, escolhidos entre 10 portugueses, 10 brasileiros e 10 espanhóis.

3.10 Dados n pontos numa circunferência, quantos polígonos de p lados ($p \leq n$) é possível formar com tais pontos?

3.11 Determine a soma de todos os números que se podem formar utilizando uma e uma só vez cada um dos algarismos ímpares, isto é, dos números 13579, 13597, …, 97531.

3.12 Através de um informador, a polícia sabe o local de encontro de um grupo de malfeitores. A identidade dos diferentes elementos do grupo é, no entanto, desconhecida. A tarefa do inspector Costa é prender o chefe do grupo. O inspector sabe que o chefe do grupo é o mais baixo dos cinco elementos do grupo, todos eles de diferentes alturas, que estarão presentes na reunião. Terminada a reunião, os bandidos, como medida de precaução, deixam o edifício separadamente, com um intervalo de 15 minutos. Como o inspector não sabe qual deles é o mais baixo, decide deixar sair os dois primeiros bandidos, e prender o primeiro dos seguintes que seja mais baixo do que os que até esse momento saíram. Qual é a probabilidade do inspector Costa prender a pessoa certa?

3.13 Suponha que dois polígonos convexos, um com $m-1$ lados e o outro com $n-1$ lados ($m \geq 4$, $n \geq 4$), possuem no total 165 lados e diagonais. Qual é o número total de diagonais de um polígono com m lados e outro com n lados?

3.14 Quantas sequências de n números (todos distintos), $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, podemos construir com os números $\{1, 2, \ldots, n\}$, tais que

$$u_i \geq \frac{i}{2} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n?$$

3.15 Encontre, por observação do Triângulo de Pascal, outras relações do tipo das referidas na página 26.

3.16 Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que:

(a) Se $a > 0$ então $(1+a)^n \geq 1 + na$;

(b) Se $\sqrt[n]{a} > 1$ então $a > 1$.

3.17 Determine o coeficiente de a^7b^6 em $(3a - 4b)^{13}$.

3.18 Determine o coeficiente de xy^2z^{-2} em $(x - 3y + 2z^{-1})^5$.

3.19 Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{k+3}{4} = \binom{n+4}{5}$;

(b) $\binom{2n+2}{2} - 2\binom{n+1}{2} = (n+1)^2$.

3.20 Prove que, para todos os inteiros positivos m e n_1, n_2 $(m \leq n_1, n_2)$, se tem

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1+n_2}{m}.$$

3.21 Determine, para cada inteiro positivo n, o maior inteiro positivo k tal que 2^k é um divisor de $3^n + 1$.

3.22 Mostre que

$$\sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t} = t^2,$$

onde o somatório se estende a todas as sequências de inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_t$ tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$. Verifique ainda que esta identidade contém, como caso particular, a identidade $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ anteriormente obtida.

3.23 (a) Determine:

(i) O termo independente de x no desenvolvimento de $(x^3 - \frac{1}{x^2})^{10}$;

(ii) O coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2(x+2)^n$;

(iii) O valor da soma $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n}$.

(b) Se $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, determine o valor de:

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$;

(ii) $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$.

3.24 A solução abaixo do seguinte problema está errada. Onde está o erro?

"Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Em primeiro lugar escolhemos 3 homens para a comissão, o que pode ser feito de $\binom{5}{3} = 10$ modos diferentes. Em seguida devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $\binom{6}{2} = 15$ modos diferentes. Então, pelo Princípio da Multiplicação, a resposta é $10 \times 15 = 150$.

3.25 (a) O que é que diz a Fórmula de Pascal para os números binomiais? Demonstre-a.

(b) Mostre que, para qualquer inteiro não-negativo $k \leq r$, se tem

$$\binom{n}{r} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{r-j}.$$

(c) Justifique que a Fórmula de Pascal é um caso particular da identidade da alínea anterior.

3.26 (a) Suponha que, numa tômbola com 16 rifas, 50% estão premiadas. Qual é a probabilidade de, ao extrairmos 4 rifas, exactamente 2 estejam premiadas?

(b) E no caso geral de termos n rifas, das quais k estão premiadas, qual é a probabilidade de, numa extracção de r rifas, exactamente j estejam premiadas?

(c) Prove a identidade do problema anterior (alínea (b)) a partir do resultado da alínea anterior.

4. Princípio da Inclusão-Exclusão

O princípio que vamos discutir neste capítulo, também conhecido por *fórmula do crivo* ou *fórmula de da Silva-Sylvester*[19], generaliza o seguinte facto evidente, válido para qualquer subconjunto A de X:

$$|A| = |X| - |X \setminus A|.$$

Esta fórmula e algumas das suas variantes têm variadas aplicações e são de grande importância na Teoria Combinatória. Com efeito, permitem a resolução de muitos problemas de contagem, nomeadamente nas situações em que se torna mais fácil fazer uma contagem indirecta dos elementos do conjunto a estudar através da contagem de elementos de outros conjuntos, com ele relacionados.

No que se segue, assumiremos que X é um conjunto finito e $P_1, P_2, \dots, P_n$ são n propriedades que cada elemento de X poderá ou não possuir. Denotaremos por A_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o conjunto dos elementos de X que possuem a propriedade P_i, e por $\overline{A_i}$ o respectivo complementar $X \setminus A_i$ em X.

4.1. Teorema. [Princípio da Inclusão-Exclusão] *O número* $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$ *de elementos de* X *que não possuem qualquer das propriedades* $P_1, P_2, \dots, P_n$ *é dado por*

$$|X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,$$

onde o primeiro somatório percorre todos os inteiros $1, 2, \dots, n$*, o segundo somatório percorre todas as combinações* $\{i, j\}$ *dos inteiros* $1, 2, \dots, n$*, dois a dois, o terceiro somatório percorre todas as combinações* $\{i, j, k\}$ *dos inteiros* $1, 2, \dots, n$*, três a três, e assim sucessivamente.*

Demonstração. É evidente que o conjunto dos elementos de X que não possuem qualquer das propriedades $P_1, P_2, \dots, P_n$ é a intersecção $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$. Podemos verificar a validade da identidade a provar mostrando que um objecto com nenhuma

[19] O Princípio da Inclusão-Exclusão foi publicado pela primeira vez em 1854, num artigo de Daniel da Silva, e mais tarde, em 1883, por Sylvester. Por isso, a fórmula do crivo e suas similares são, por vezes, apelidadas de fórmulas de da Silva ou de Sylvester. Há quem defenda que já era conhecida, nalguma forma, dos irmãos Bernoulli, como Ryser afirma no seu livro ([12], p. 19). Realçamos o facto de Daniel da Silva, na opinião de Gomes Teixeira o mais notável matemático português do séc. XIX, ter sido estudante da Universidade de Coimbra; transcrevemos de [J. Silva Oliveira, *Daniel Augusto da Silva*, Boletim da SPM 2 (1979) 3-15]: "Daniel da Silva (1814-1878) foi, além de matemático eminente do seu tempo, oficial da Armada e professor da Escola Naval. Como estudante frequentou primeiro a Academia Real de Marinha e prosseguiu depois os seus estudos na Universidade de Coimbra onde, com altas classificações, se licenciou em Matemática e acabou por se doutorar".

das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com uma unidade para a soma do segundo membro e que um objecto que verifique pelo menos uma dessas propriedades contribui com um zero para essa mesma soma.

Designemos esta soma por M. Cada elemento de X que não possui nenhuma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com $1-0+0-0+\cdots+(-1)^n \times 0 = 1$ unidades para o valor M, pois não pertence a nenhum A_i $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Por outro lado, cada elemento de X que possui m $(1 \leq m \leq n)$ das n propriedades contribui com $C_0^m = 1$ unidades para $|X|$, com $C_1^m = m$ unidades para $\sum_{i=1}^n |A_i|$ (pois pertence a m dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$), com C_2^m unidades para $\sum_{i,j=1;i<j}^n |A_i \cap A_j|$ (pois existem C_2^m maneiras diferentes de escolher um par de propriedades distintas que ele satisfaça) e assim sucessivamente. Então a sua contribuição para M é

$$C_0^m - C_1^m + C_2^m - C_3^m + \cdots + (-1)^m C_m^m$$

que é, pela identidade (3.10.3), igual a zero. ∎

Por vezes, a seguinte formulação alternativa do Princípio de Inclusão-Exclusão é mais útil:

4.2. Corolário. *O número $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ de elementos de X que possuem, pelo menos, uma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é igual a*

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Demonstração. É claro que o número de elementos de elementos de X que verificam pelo menos uma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é o cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = X \setminus (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n})$. Pelo Teorema 4.1 esse número é igual a

$$|X| - \Big(|X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

∎

Vejamos alguns exemplos de aplicação do Princípio da Inclusão-Exclusão. Comecemos por recordar o Problema (B3) da Introdução:

À saída de um restaurante, de quantas maneiras podem ser devolvidos os chapéus de n pessoas de modo a que nenhuma pessoa receba o seu chapéu?

Este problema é um exemplo do seguinte problema geral, designado *problema dos desencontros*:

Estando os elementos de um conjunto finito S dispostos segundo uma certa ordem, quantas permutações de S existem nas quais nenhum elemento esteja na sua posição primitiva?

Uma permutação $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_n}$ de $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ diz-se um *desencontro* de S caso $j_k \neq k$ para qualquer $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Denotemos por D_n o número de desencontros de S.

4.3. Teorema. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$.*

Demonstração. Seja X o conjunto de todas as permutações de S. Claro que $|X| = n!$. Seja ainda A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ o conjunto das permutações $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_n}$ tais que $a_{j_i} = a_i$ (portanto aquelas em que a_i está na posição primitiva). Claro que $|A_i| = (n-1)!$. As permutações em $A_i \cap A_j$ têm a_i e a_j fixos, nas posições i e j respectivamente, e os restantes $n-2$ elementos permutados nas restantes $n-2$ posições, pelo que $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$. Analogamente, podemos concluir que $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Como $D_n = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$, decorre pelo Princípio da Inclusão-Exclusão que

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$ ∎

Na sua forma original o problema (B3) foi formulado em termos de probabilidades, questionando a probabilidade de nenhuma pessoa receber de volta o respectivo chapéu. Evidentemente, a resposta é a probabilidade de uma permutação de n objectos, escolhida aleatoriamente, ser um desencontro, ou seja,

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Na tabela seguinte podemos ver o cálculo desta probabilidade para alguns valores particulares de n:

n	2	3	4	5	6	7
$\frac{D_n}{n!}$	0.5	0.33333	0.375	0.36667	0.36806	0.36786

Usando factos da Análise Infinitesimal é possível provar que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= e^{-1} \\ &\approx 0.368. \end{aligned}$$

Para terminar, vejamos como o Princípio da Inclusão-Exclusão também serve para resolver o Problema (B2) da Introdução.

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ e denotemos o conjunto dos primeiros n números naturais por $\overline{n}$. Designando o conjunto $\{x \in \overline{n} \mid x \text{ é divisível por } a_i\}$ por A_i, o número pedido dos inteiros positivos inferiores ou iguais a n, não divisíveis por nenhum dos elementos de A é o cardinal de $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}$.

Claramente $|A_i|$ é a parte inteira do número $\frac{n}{a_i}$, habitualmente denotada por $\left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor$. Como

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \{x \in \overline{n} \mid x \text{ é divisível por } a_i \text{ e } a_j\} \\ &= \{x \in \overline{n} \mid x \text{ é divisível por } \mathrm{mmc}(a_i, a_j)\} \end{aligned}$$

então $|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i, a_j)} \right\rfloor$. Mais geralmente,

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l})} \right\rfloor,$$

pelo que $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i, a_j)} \right\rfloor - \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_1, a_2, \ldots, a_t)} \right\rfloor.$$

No caso particular em que os elementos de A são todos primos entre si, o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a n que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j a_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_t} \right\rfloor.$$

Contemos agora o número $\phi(n)$ de inteiros positivos, inferiores a n, primos com n. Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ a factorização de n em números primos. Como os conjuntos

$$\left\{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k, n) = 1 \right\}$$

e

$$\left\{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } p_i \nmid k \text{ para } i = 1, 2, \ldots, t \right\}$$

coincidem bastará aplicar a fórmula acima deduzida ao conjunto $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. Imediatamente se conclui que o número $\phi(n)$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_t} \right\rfloor.$$

A função

$$\begin{array}{rcl} \phi : \quad \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \phi(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k,n) = 1\}| \end{array}$$

é a chamada *função de Euler*, muito importante em Teoria dos Números. Pode provar-se que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{t} (1 - \frac{1}{p_i})$$

e

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d | n}} \phi(d) = n.$$

Finalmente, vejamos um processo de contar os números primos entre 2 e $n \geq 2$. O crivo de Eratóstenes é um processo que permite enumerar todos os primos entre 1 e qualquer inteiro positivo k:

- Calcula-se $c = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$;
- Apagam-se, na sucessão $2, 3, 4, \ldots, k$ todos os múltiplos de $2, 3, 4, \ldots, c$ (com excepção dos próprios números $2, 3, 4, \ldots, c$);
- Os números que restam são os primos entre 1 e k.

Então, para determinar o número de primos entre 1 e k, bastará:

- determinar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_t$ entre 1 e $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$, usando o crivo de Eratóstenes;
- em seguida, determinar, com a ajuda da fórmula acima deduzida, quantos inteiros positivos inferiores ou iguais a n não são divisíveis por nenhum dos elementos de $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. Como os primos entre $\left\lfloor \sqrt{n} + 1 \right\rfloor$ e n são exactamente os inteiros positivos inferiores ou iguais a n (com excepção do 1) que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A, o seu número é igual a

$$M(n) = n - 1 - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_t} \right\rfloor.$$

Concluindo, o número de primos entre 1 e n será igual a $t + M(n)$.

Exercícios

4.1 O Clube Pitágoras tem 100 sócios do sexo feminino e 80 sócios do sexo masculino. O Clube Euclides tem 80 sócios do sexo feminino e 100 sócios do sexo masculino. Existem exactamente 60 raparigas que são sócias de ambos os clubes. O número total de pessoas que pertencem a pelo menos um dos clubes é igual a 230.

Quantos rapazes são sócios do Clube Pitágoras e não são sócios do Clube Euclides?

4.2 Determine o número de maneiras diferentes de construir uma rede de estradas numa região com 4 aldeias, de modo a nenhuma aldeia ficar isolada, isto é, de modo a qualquer aldeia ficar ligada a, pelo menos, outra aldeia.

4.3 Calcule o número de inteiros entre 1 e 10000 que não são quadrados perfeitos nem cubos perfeitos.

4.4 Uma pessoa escreveu 5 cartas diferentes a 5 amigos e fechou-as nos envelopes sem reparar que os envelopes já tinham os endereços escritos. De quantas maneiras diferentes:

(a) pode nenhuma carta corresponder ao envelope onde foi colocada?

(b) podem exactamente 2 amigos receber as cartas que lhes eram destinadas?

4.5 Quantos inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ não são divisíveis nem por 3 nem por 5?

4.6 Determine o número de funções sobrejectivas de um conjunto com m elementos num conjunto com n elementos.

4.7 [Problema 6 das XXX Olimpíadas Internacionais de Matemática (1989)]

Para cada natural n diz-se que uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ possui a propriedade P se existe $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ tal que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Prove que, para cada natural n, existem mais permutações com a propriedade P do que sem ela.

5. Combinações (e arranjos) com repetição

Neste capítulo vamos abordar novamente as combinações e os arranjos, mas admitiremos agora eventual repetição de elementos em cada uma dessas estruturas. Seja então S um conjunto com n elementos. Consideremos as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de elementos de S, eventualmente não todos distintos. Designemos estas sequências por *arranjos com repetição de elementos de S, r a r.*

Se admitirmos que cada elemento de S se pode repetir, como componente dos arranjos com repetição, tantas vezes quantas quisermos, temos:

5.1. Proposição. *O número destes arranjos, que denotaremos por $\overline{A}_r^n$, é igual a n^r.*

Demonstração. Atendendo à definição de produto cartesiano de conjuntos, é evidente que

$$\overline{A}_r^n = |\underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{r \text{ vezes}}|,$$

que, pelo Princípio da Multiplicação, coincide com

$$\underbrace{|S| \times |S| \times \cdots \times |S|}_{r \text{ vezes}} = n^r. \qquad \blacksquare$$

5.2. Exemplos.

(a) O número de colunas do totobola que teríamos de preencher para termos a certeza de obter 13 resultados certos é $\overline{A}_{13}^3 = 3^{13}$.

(b) Na página 27 observámos que o número de subconjuntos de um conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é igual a 2^n. Podemos concluir isso de outro modo: se a cada subconjunto S' de S fizermos corresponder uma sequência $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ de comprimento n, definida por

$$a_i' = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i \in S \\ \\ 0 \text{ se } a_i \notin S \end{cases}$$

concluímos que o número de subconjuntos de S é dado por $\overline{A}_n^2 = 2^n$.

Designaremos por *multi-conjunto* uma estrutura similar à de um conjunto mas com a diferença de os seus elementos não terem forçosamente que ser distintos. Por exemplo, $M = \{a, a, b, b, b, c\}$ é um multi-conjunto com 6 elementos: 2 a's, 3 b's, 1 c. Costuma indicar-se um multi-conjunto especificando o número de ocorrências de cada elemento. Portanto o multi-conjunto M também se denota por $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, c\}$. Chamaremos *combinação com repetição dos elementos de S, r a r*, aos multi-conjuntos de r elementos de S.

5.3. Proposição. *O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, que designaremos por $\overline{C}_r^n$, é igual a C_r^{n-1+r}.*

Demonstração. Podemos demonstrar este resultado utilizando somente argumentos combinatoriais. De facto, cada combinação com repetição de n elementos r a r pode ser representada por uma sequência de $n-1$ barras e r asteriscos, do seguinte modo: as barras são utilizadas para demarcar em n células os n diferentes elementos de S, com a i-ésima célula contendo um asterisco sempre que o i-ésimo elemento de S ocorre na combinação. Por exemplo, para $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

Multi-conjunto	Representação
$\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	$**\,|\,*\,|\,|\,***$
$\{a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3\}$	$|\,**|\,****|$

Assim o número de combinações com repetição de n elementos r a r coincide com o número de sequências contendo $n-1$ barras e r asteriscos. O número de tais sequências é igual a C_r^{n-1+r}, uma vez que cada sequência corresponde a uma escolha de r posições (das $n-1+r$ posições disponíveis) para colocar os r asteriscos. ∎

Demonstrámos esta proposição utilizando somente argumentos combinatoriais. Aliás, a solução de problemas combinatoriais requere geralmente o uso de métodos *ad hoc*; deve-se estudar a situação, desenvolver algum raciocínio e usar a própria intuição para encontrar a solução do problema. Isto não quer dizer que não existam princípios ou métodos que possam ser aplicados. Com efeito, já estudámos alguns. Mas todos eles requerem inteligência para se saber quando e como aplicá-los e, sobretudo, experiência (que naturalmente só se adquire resolvendo problemas).

Um outro princípio muito importante é o de indução matemática. Trata-se de um dos princípios fundamentais da Teoria Combinatória para confirmar descobertas e garantir a validade de muitos raciocínios. Por exemplo, pode-se provar a Proposição 5.3 com a sua ajuda.

5.4. Lema. $\overline{C}_{r+1}^n = \overline{C}_r^n + \overline{C}_r^{n-1} + \cdots + \overline{C}_r^1$.

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os elementos a formar as combinações. Tendo em conta a definição de multi-conjunto, podemos supor, sem perda de generalidade, que os elementos dos multi-conjuntos de cardinal $r+1$ estão dispostos por ordem crescente (em sentido lato) dos seus índices, da esquerda para a direita. Assim o número de combinações com repetição de n elementos $r+1$ a $r+1$ que começam por a_1 é igual a $\overline{C}_r^n$, o número de combinações com repetição de n elementos $r+1$ a $r+1$ que começam por a_2 é igual a $\overline{C}_r^{n-1}$, etc., e o das que começam por a_n é igual a $\overline{C}_r^1$. Logo, pelo Princípio da Adição,

$$\overline{C}_{r+1}^n = \overline{C}_r^n + \overline{C}_r^{n-1} + \cdots + \overline{C}_r^1. \qquad \blacksquare$$

Demonstremos então a Proposição 5.3 por indução sobre r:

É evidente que $\overline{C}_1^n = n$ pois com n elementos podemos construir exactamente n multi-conjuntos de cardinal 1. Por outro lado, como $C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = n$, podemos escrever $\overline{C}_r^n = C_r^{n+r-1}$ para $r = 1$.

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que o resultado é verdadeiro para um dado $r \in \mathbb{N}$. Nesta hipótese, provaremos a validade do resultado para $r+1$:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{r+1}^n &= \overline{C}_r^n + \overline{C}_r^{n-1} + \cdots + \overline{C}_r^1 && \text{(Lema 5.4)} \\
&= C_r^{n+r-1} + C_r^{n+r-2} + \cdots + C_r^r && \text{(Hipótese de indução).}
\end{aligned}$$

Decompondo cada uma das parcelas, usando a Fórmula de Pascal, vem

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{r+1}^n &= C_{r+1}^{n+r} - C_{r+1}^{n+r-1} + C_{r+1}^{n+r-1} - C_{r+1}^{n+r-2} + \cdots + C_{r+1}^{r+2} - C_{r+1}^{r+1} + C_r^r \\
&= C_{r+1}^{n+r}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Com isto pretendemos ilustrar o facto de que o mesmo resultado pode ser provado de diversas maneiras, utilizando diferentes técnicas, e como a utilização do Princípio de Indução Matemática valida os raciocínios combinatoriais utilizados.

Exemplos.

(a) O número de sequências crescentes (em sentido lato) com r componentes, escolhidas no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, é igual a C_r^{n+r-1}.

(b) O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, é igual a

$$\overline{C}_{11}^3 = C_{11}^{3+11-1} = C_{11}^{13} = 78.$$

De facto, mais geralmente, $\overline{C}_r^n$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r :$$

Qualquer combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, r a r, contém p_i elementos iguais a a_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), $p_i \in \mathbb{N}_0$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = r$; por outro lado, é evidente que a cada conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de inteiros positivos ou nulos, com $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = r$, podemos fazer corresponder a combinação com repetição de elementos de S, r a r,

$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{p_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{p_2 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{p_n \text{ vezes}}\}.$$

(c) Qual é o valor de k depois do seguinte algoritmo ter sido executado?

```
k := 0
for i1 := 1 to n
    for i2 := 1 to i1
        for i3 := 1 to i2
            ⋮
                for im := 1 to im−1
                    k := k + 1
```

Observemos que o valor inicial de k é 0 e que uma unidade é adicionada a k de cada vez que o *loop* é atravessado com um conjunto de inteiros $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tais que $1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \ldots \leq i_2 \leq i_1 \leq n$. O número de tais conjuntos de inteiros é igual ao número de maneiras de escolher m inteiros de $\{1, 2, \ldots, n\}$, ordenados por ordem crescente, com repetição permitida, ou seja, igual a $\overline{C}_m^n = C_m^{n+m-1}$.

5.5. Corolário. *Seja S um conjunto com n elementos. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r ($r \geq n$), contendo todos os elementos de S (cada um pelo menos uma vez), é igual a C_{n-1}^{r-1}.*

Demonstração. Em cada multi-conjunto haverá n elementos distintos, podendo os $r-n$ restantes serem elementos quaisquer de S. Consequentemente, o número a contar é igual a

$$\overline{C}_{r-n}^n = C_{r-n}^{n+r-n-1} = C_{r-n}^{r-1} = C_{r-1-r+n}^{r-1} = C_{n-1}^{r-1}. \qquad \blacksquare$$

Mais geralmente, tem-se:

5.6. Corolário. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a $C^{n+r-r_1-\cdots-r_n-1}_{r-r_1-\cdots-r_n}$.*

Demonstração. Em cada multi-conjunto haverá r_i elementos iguais a a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) podendo os restantes $r - r_1 - \cdots - r_n$ serem elementos quaisquer de S. Portanto, o número de combinações requerido é igual a

$$\overline{C}^{n}_{r-r_1-\cdots-r_n} = C^{n+r-r_1-\cdots-r_n-1}_{r-r_1-\cdots-r_n}. \qquad \blacksquare$$

E o número dos respectivos arranjos?

5.7. Proposição. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de arranjos com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a*

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}.$$

Demonstração. Basta observar que o número desses arranjos é igual a

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} C^{r}_{s_1} \times C^{r-s_1}_{s_2} \times C^{r-s_1-s_2}_{s_3} \cdots \times C^{s_n}_{s_n}$$

e que, como já observámos,

$$C^{r}_{s_1} \times C^{r-s_1}_{s_2} \times C^{r-s_1-s_2}_{s_3} \cdots \times C^{s_n}_{s_n} = \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}. \qquad \blacksquare$$

Observação. O caso particular em que cada r_i é igual a 1 (correspondente ao Corolário 5.5) diz-nos que o número de arranjos com repetição de elementos de S, r a r, contendo todos os elementos de S, é igual a

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq 1} \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}. \tag{5.7.1}$$

Como estes arranjos correspondem claramente às funções sobrejectivas de $\{1, 2, \ldots, r\}$ em S, este número é igual ao número de funções sobrejectivas de um conjunto com r elementos num conjunto com n elementos. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão (Exercício 4.6) este número é ainda igual a

$$n^r - C^n_1(n-1)^r + C^n_2(n-2)^r - C^n_3(n-3)^r + \cdots + (-1)^{n-1}C^n_{n-1}. \tag{5.7.2}$$

Portanto os números (5.7.1) e (5.7.2) coincidem. Esta identidade pode também ser verificada directamente, sem grandes dificuldades, usando o Princípio da Inclusão-Exclusão.

Até aqui não impusemos restrições ao número de vezes que cada elemento pode ser repetido. Vejamos o que acontece se impusermos tais restrições, nomeadamente, se assumirmos que cada elemento a_i de $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pode ser repetido quando muito r_i vezes ($r_i \in \mathbb{N}_0$). Designaremos o número dos respectivos arranjos e combinações por $\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ e $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, respectivamente. É claro que se $r_1 + r_2 + \cdots + r_n < r$ estes números são iguais a zero.

Comecemos por determinar o número $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Uma vez que é mais simples contar o número das combinações com repetição onde a_i aparece pelo menos $r_i + 1$ vezes do que as combinações com repetição nas quais a_i aparece no máximo r_i vezes, faremos uso do Princípio da Inclusão-Exclusão.

Seja X o conjunto de todas as combinações com repetição de elementos de S, r a r, podendo os elementos de S aparecer tantas vezes quantas quisermos. O cardinal deste conjunto é $\overline{C}_r^n$. Nos elementos de X definamos as seguintes propriedades P_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$):

> "Um elemento de X tem a propriedade P_i se tiver mais do que r_i elementos iguais a a_i".

O número $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é igual ao número de elementos de X que não possuem qualquer das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja A_i o subconjunto de X dos elementos que possuem a propriedade P_i. Então, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é igual a

$$|X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Mas

$$|X| = \overline{C}_r^n = C_r^{n+r-1}$$

e

$$|A_i| = \begin{cases} \overline{C}_{r-r_i-1}^n = C_{r-r_i-1}^{n+r-r_i-2} & \text{se } r \geq r_i + 1 \\ \\ 0 & \text{se } r < r_i + 1, \end{cases}$$

uma vez que todos os elementos de A_i são combinações com repetição de elementos de S, $r - r_i - 1$ a $r - r_i - 1$ (pois todo o elemento de A_i tem pelo menos $r_i + 1$ elementos iguais a a_i), podendo os elementos aparecer repetidos tantas vezes quantas quisermos.

De modo semelhante se vê que, para $i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, distintos dois a dois, o cardinal $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}|$ é igual a

$$\overline{C}^n_{r-(r_{i_1}+1+r_{i_2}+1+\cdots+r_{i_t}+1)} = C^{n-1+r-r_{i_1}-r_{i_2}-\cdots-r_{i_t}-t}_{r-r_{i_1}-r_{i_2}-\cdots-r_{i_t}-t},$$

se $r \geq r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_t} + t$, e igual a 0, caso contrário. É assim possível calcular $\overline{C}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, apesar da fórmula geral para este cálculo não ter uma apresentação simples; o número $\overline{C}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ coincide com

$$C^{n+r-1}_r - \sum_{\substack{i=1\\ r_i \leq r-1}}^{n} C^{n+r-r_i-2}_{r-r_i-1} + \sum_{\substack{i,j=1, i<j\\ r_i+r_j \leq r-2}}^{n} C^{n+r-r_i-r_j-3}_{r-r_i-r_j-2} -$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=1, i<j<k\\ r_i+r_j+r_k \leq r-3}}^{n} C^{n+r-r_i-r_j-r_k-4}_{r-r_i-r_j-r_k-3} + \cdots + 0.$$

Se convencionarmos que $C^n_r = 0$ sempre que $r < 0$ podemos escrever

$$\overline{C}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n) = C^{n+r-1}_r - \sum_{i=1}^{n} C^{n+r-r_i-2}_{r-r_i-1} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} C^{n+r-r_i-r_j-3}_{r-r_i-r_j-2} -$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} C^{n+r-r_i-r_j-r_k-4}_{r-r_i-r_j-r_k-3} + \cdots + 0.$$

Exemplo. O número $\overline{C}^3_{10}(3, 4, 5)$ de combinações com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, 10 a 10, podendo a_1 aparecer repetido quando muito 3 vezes, a_2 quando muito 4 vezes e a_3 quando muito 5 vezes é igual a

$$\begin{aligned}
& \overline{C}^3_{10} - (\overline{C}^3_6 + \overline{C}^3_5 + \overline{C}^3_4) + (\overline{C}^3_1 + \overline{C}^3_0 + 0) - 0 \\
= \ & C^{12}_{10} - (C^8_6 + C^7_5 + C^6_4) + (C^3_1 + C^2_0 + 0) - 0 \\
= \ & 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 \\
= \ & 6.
\end{aligned}$$

Enumeremo-las:

$$a_1a_2a_2a_2a_2a_3a_3a_3a_3a_3$$

$$a_1a_1a_2a_2a_2a_2a_3a_3a_3a_3$$

$$a_1a_1a_2a_2a_2a_3a_3a_3a_3a_3$$

$$a_1a_1a_1a_2a_2a_2a_2a_3a_3a_3$$

$$a_1a_1a_1a_2a_2a_2a_3a_3a_3a_3$$

$$a_1a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_3a_3a_3$$

No Exemplo (b) da página 45 observámos já a relação entre as combinações com repetição e as soluções inteiras de equações. Agora, o número $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é igual ao número de soluções inteiras da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

sujeitas à restrição $0 \leq x_i \leq r_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Analisemos alguns casos particulares importantes.

(1) $\underline{r_i \geq r \text{ para qualquer } i \in \{1, 2, \ldots, n\}}$:

É evidente que, neste caso,

$$\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \overline{A}_r^n$$

e

$$\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \overline{C}_r^n$$

(pois $|A_i| = 0$ para qualquer i).

(2) $\underline{r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1,\ n \geq r}$:

É também evidente que, neste caso,

$$\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = A_r^n$$

e

$$\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = C_r^n.$$

Aplicando aqui a fórmula acima obtida pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, obtemos a identidade

$$C_r^n = C_r^{n+r-1} - \sum_{i=1}^{n} C_{r-2}^{n+r-3} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} C_{r-4}^{n+r-5} - \cdots$$

Em particular, para $r = 3$, segue

$$C_3^n = C_3^{n+2} - nC_1^n = C_3^{n+2} - n^2.$$

(3) $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$ (ou seja, cada elemento a_i aparece exactamente r_i vezes):

Obviamente $\overline{C}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 1$ pois a única combinação é

$$\{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{r_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{r_2 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{r_n \text{ vezes}}\}.$$

Quanto aos arranjos temos:

5.8. Proposição. *Seja $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$. Então*

$$\overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}.$$

Demonstração. Em cada um destes arranjos haverá r_i componentes iguais a a_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Para contá-los, observemos primeiro que os r_1 objectos a_1 podem ser colocados em r posições de $C^r_{r_1}$ modos distintos, deixando $r - r_1$ posições livres. Seguidamente, os r_2 objectos a_2 podem ser colocados nessas posições livres de $C^{r-r_1}_{r_2}$ modos distintos, deixando $r - r_1 - r_2$ posições livres. Continuando a colocar os objectos $a_3, \ldots, a_n$ veremos que o número de hipóteses para a_n será

$$C^{r-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1}}_{r_n}.$$

Então, pelo Princípio da Multiplicação, $\overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é igual a

$$C^r_{r_1} \times C^{r-r_1}_{r_2} \times \cdots \times C^{r-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1}}_{r_n}$$

que, por sua vez, é igual a

$$\frac{r!}{r_1!(r-r_1)!} \times \frac{(r-r_1)!}{r_2!(r-r_1-r_2)!} \times \cdots \times \frac{(r-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1})!}{r_n!(r-r_1-r_2-\cdots-r_n)!},$$

ou seja, a

$$\frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!},$$

pois $r - r_1 - r_2 - \cdots - r_n = 0$. ■

Exemplo. O número de palavras diferentes que se podem formar com as letras da palavra COMBINATÓRIA é

$$\overline{A}^9_{12}(1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1) = \frac{12!}{2!2!2!}.$$

Quanto ao número $\overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, no caso geral não se conhece nenhuma fórmula simples. Se seguirmos o raciocínio usado para o cálculo de $\overline{C}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, através do Princípio da Inclusão-Exclusão, denotando por A_i o conjunto dos arranjos com repetição de n elementos r a r, onde o elemento a_i aparece pelo menos $r_i + 1$ vezes, obtemos:

$$|A_i| = \begin{cases} C^r_{r_i+1} \times \overline{A}^{n-1}_{r-r_i-1} + C^r_{r_i+2} \times \overline{A}^{n-1}_{r-r_i-2} + \cdots + C^r_r \times \overline{A}^{n-1}_{r-r} + & \text{se } r \geq r_i + 1 \\ \\ 0 & \text{se } r < r_i + 1, \end{cases}$$

(a parcela $C^r_{r_i+1} \times \overline{A}^{n-1}_{r-r_i-1}$ corresponde aos arranjos em que a_i aparece exactamente $r_i + 1$ vezes, a parcela $C^r_{r_i+2} \times \overline{A}^{n-1}_{r-r_i-2}$ corresponde aos arranjos em que a_i aparece exactamente $r_i + 2$ vezes, etc.)

O cálculo de $|A_i \cap A_j|$ tem um aspecto ainda mais complicado; é igual a zero caso $r < r_i + r_j + 2$ mas é igual a

$$\begin{array}{ll} & C^r_{r_i+1} \times\Big(C^{r-r_i-1}_{r_j+1} \times \overline{A}^{n-2}_{r-r_i-r_j-2} + C^{r-r_i-1}_{r_j+2} \times \overline{A}^{n-2}_{r-r_i-r_j-3} + \cdots + 1\Big) + \\ + & C^r_{r_i+2} \times\Big(C^{r-r_i-2}_{r_j+1} \times \overline{A}^{n-2}_{r-r_i-r_j-3} + C^{r-r_i-2}_{r_j+2} \times \overline{A}^{n-2}_{r-r_i-r_j-4} + \cdots + 1\Big) + \\ + & \ldots \end{array}$$

caso $r \geq r_i + r_j + 2$. Isto torna a escrita da fórmula para $\overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ muito fastidiosa e nada agradável.

Uma alternativa a este método será determinar $\overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ a partir do caso particular (3), usando o Princípio da Adição:

$$\begin{aligned} \overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= \sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_n=r \\ s_i \leq r_i \forall i}} \overline{A}^n_r(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\ &= \sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_n=r \\ s_i \leq r_i \forall i}} \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} \end{aligned}$$

onde o somatório é estendido a todos os n-uplos $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de inteiros não negativos tais que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = r$ e $s_i \leq r_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observações. (a) No caso particular (1), ou seja, quando $r_i \geq r$ para qualquer $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, esta fórmula diz-nos que

$$\begin{aligned} \overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r} \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots, s_n!} \\ &= \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r} \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n} \\ &= (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})^r \\ &= n^r \\ &= \overline{A}^n_r. \end{aligned}$$

(b) No caso particular (2), quando $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$, esta fórmula diz-nos que

$$\begin{aligned} \overline{A}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= \sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_n=r \\ s_i \leq 1 \forall i}} r! \\ &= C^n_r \times r! \\ &= A^n_r. \end{aligned}$$

(c) Finalmente, no caso particular (3) em que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$, esta fórmula diz-nos imediatamente que

$$\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!},$$

como provámos na Proposição 5.8.

Exemplo.

$$\begin{aligned}
\overline{A}_6^3(2,3,4) &= \overline{A}_6^3(0,2,4) + \overline{A}_6^3(0,3,3) + \overline{A}_6^3(1,1,4) + \overline{A}_6^3(1,2,3) + \overline{A}_6^3(1,3,2) + \\
&\quad + \overline{A}_6^3(2,0,4) + \overline{A}_6^3(2,1,3) + \overline{A}_6^3(2,2,2) + \overline{A}_6^3(2,3,1) \\
&= 2 \times \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{3!3!} + 4 \times \frac{6!}{3!2!} + \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{2!2!2!} \\
&= 30 + 20 + 240 + 30 + 90 = 410.
\end{aligned}$$

É possível ainda encontrar uma solução mais simples para este problema usando as técnicas das funções geradoras (a estudar no último capítulo).

Exercícios

5.1 No estranho estado da Poldavia, numa recente campanha eleitoral, os diversos partidos concorrentes fizeram, ao todo, 7 promessas aos eleitores. Sabendo que

- (a) todos os partidos prometeram alguma coisa,
- (b) não houve dois partidos a fazerem as mesmas promessas eleitorais,
- (c) quaisquer dois partidos fizeram pelo menos uma promessa comum,

quantos partidos, no máximo, concorreram às eleições?

5.2 Quantos números de telefone com 9 algarismos se podem criar, de modo que o último não seja nem 1 nem 0?

5.3 Quantos números de 3 algarismos se podem formar com os algarismos 1,2,3,4,5,6:

- (a) sem repetição de algarismos?
- (b) podendo haver repetição de algarismos?
- (c) de modo que sejam pares?
- (d) de modo que sejam pares e constituídos por algarismos distintos?

5.4 Com as letras X, Y e Z considere os arranjos onde X aparece no máximo duas vezes, Y aparece no máximo uma vez e Z aparece uma ou duas vezes. Qual é o número desses arranjos com:

- (a) 5 elementos?
- (b) 3 elementos?

5.5 (a) De quantas maneiras é possível que todos os 41 alunos de uma turma tenham notas (arredondadas às unidades) entre 9 e 13?

(b) Quantas dessas maneiras correspondem a 100% de aprovações?

(c) Nas condições da alínea (a), quantos alunos se pode garantir que terão a mesma nota?

5.6 Quantas sequências podem ser formadas com todas as letras da palavra FINITA:

(a) no total?

(b) que começam em A e terminam em I?

(c) que começam em A e terminam em F?

(d) que possuem as três vogais juntas?

5.7 Mostre que a fórmula obtida na Proposição 5.8 ainda é válida se houver índices $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $r_i = 0$.

5.8 (a) Qual é a probabilidade $p(n)$ de, entre n pessoas, existirem pelo menos duas que façam anos no mesmo dia?

(b) Escreva uma tabela com os valores (aproximados até às centésimas) de

$$p(5), p(10), p(15), p(20), p(25), p(30).$$

(c) Qual é o menor valor de n tal que $p(n) \geq \frac{1}{2}$?

(d) Quando é que $p(n) \geq 0.99$?

6. Partições

6.1. Problema. *Pretendemos distribuir 9 alunos por 3 grupos (3 alunos em cada grupo). O primeiro grupo, G_1, vai discutir um problema sobre o Princípio da Inclusão--Exclusão, o segundo grupo, G_2, vai discutir um problema sobre o Teorema Multinomial e o terceiro grupo, G_3, vai discutir o Problema de Fibonacci. De quantas maneiras diferentes podemos fazer a distribuição?*

Temos C_3^9 hipóteses de escolher o primeiro grupo. Uma vez escolhido G_1, os restantes 6 alunos podem ser distribuídos por G_2 e G_3 de C_3^6 maneiras diferentes, pois o terceiro grupo fica implicitamente definido pela escolha de G_1 e G_2. Pelo Princípio da Multiplicação podemos concluir que a distribuição pode ser realizada de

$$C_3^9 \times C_3^6 = \binom{9}{3,3,3}$$

modos diferentes.

6.2. Problema. *Pretendemos distribuir 9 alunos por 3 grupos (3 alunos em cada grupo). Só depois de formados é que os grupos escolherão o trabalho a realizar. De quantas maneiras diferentes podemos fazer a distribuição?*

Enquanto que no Problema 6.1 os grupos estavam definidos *a priori*, implicando, por exemplo, que a distribuição

$$G_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ G_2 = \{a_4, a_5, a_6\},\ G_3 = \{a_7, a_8, a_9\}$$

seja diferente da distribuição

$$G_1 = \{a_4, a_5, a_6\},\ G_2 = \{a_1, a_2, a_3\},\ G_3 = \{a_7, a_8, a_9\},$$

em 6.2 estas duas distribuições vão ser equivalentes porquanto, neste caso, são os elementos que se escolhem para cada grupo que vão definir o grupo (o trabalho que os alunos a_1, a_2, a_3 realizarão conjuntamente será independente do facto de formarem G_1, G_2 ou G_3).

É evidente que podemos agrupar as distribuições do Problema 6.1 em classes, cada uma das quais com tantas distribuições quantas as permutações dos 3 grupos (ou seja, $3! = 6$), tais que distribuições na mesma classe sejam equivalentes no sentido do Problema 6.2 e distribuições em classes diferentes continuem a ser distribuições diferentes no sentido de 6.2. Isto diz-nos que a resposta ao Problema 6.2 é

$$\frac{C_3^9 \times C_3^6}{3!}.$$

O tipo de distribuição descrita nestes dois problemas é um exemplo de partição de um conjunto S em r subconjuntos. O que diferencia um do outro é o facto de no primeiro a ordem dos subconjuntos ser relevante e no outro não.

Abordemos este tipo de estruturas de um modo geral e sistemático. Seja S um conjunto com n elementos. Já recordámos anteriormente que $S_1, S_2, \ldots, S_r$ é uma *partição* de S caso $S = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. Agora diremos que uma *partição ordenada* de S é uma sequência ordenada $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$, onde $S_1, S_2, \ldots, S_r$ formam uma partição de S. Denotaremos o número total de partições ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos (sem qualquer restrição para o cardinal de cada subconjunto) por PO_r^n. Se nos restringirmos ao caso em que cada subconjunto contém um determinado cardinal n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, denotaremos esse número por $PO_r^n(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Uma *partição não ordenada* de S é um conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ onde $S_1, S_2, \ldots, S_r$ formam uma partição de S. Denotaremos o número total de partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos (sem qualquer restrição para o cardinal de cada subconjunto) por P_r^n. Se nos restringirmos ao caso em que cada subconjunto contém um determinado cardinal n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, denotaremos esse número por $P_r^n(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Retomando os Problemas 6.1 e 6.2, é claro que em 6.1 se pede o número $PO_3^9(3,3,3)$, enquanto em 6.2 se pede o número $P_3^9(3,3,3)$ de partições não ordenadas correspondentes.

O raciocínio utilizado para resolver o Problema 6.1 pode ser imediatamente generalizado de modo a obtermos $PO_r^n(n_1, n_2, \ldots, n_r)$:

6.3. Teorema. *Seja S um conjunto com n elementos. O número $PO_r^n(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ de partições ordenadas de S em r subconjuntos tais que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, o i-ésimo subconjunto possui n_i elementos ($n_i \in \mathbb{N}_0$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$) é igual a*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}.$$

Demonstração. Poderíamos facilmente obter uma demonstração deste resultado estendendo a r subconjuntos o raciocínio usado para resolver o Problema 6.1. Contudo preferimos apresentar uma outra demonstração que identifica estas estruturas com estruturas anteriormente estudadas.

Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. A cada partição ordenada $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$ de S em r subconjuntos, tendo cada S_i exactamente n_i elementos, podemos fazer corresponder uma e uma só sequência ordenada de n componentes, escolhidas entre os elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, r\}$ de tal modo que a i-ésima componente seja j se e só se $a_i \in S_j$. Deste modo estabelecemos uma aplicação bijectiva entre o conjunto das partições ordenadas de S em r subconjuntos, nas condições dadas, e o conjunto dos arranjos com repetição dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, r\}$, n a n, onde cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ aparece repetido n_i vezes e $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

Como vimos em 5.8, o número $\overline{A}_n^r(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ destes arranjos é igual a

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}. \qquad \blacksquare$$

Este resultado é mais um exemplo da importância dos números multinomiais.

Como já observámos, no Problema 6.2 as partições não ordenadas são diferentes das respectivas partições ordenadas. Nem sempre assim acontece. Suponhamos que em 6.1 e 6.2 os grupos devem ter 2, 3 e 4 elementos respectivamente. Esta ligeira alteração implica as seguintes alterações nas soluções dos dois problemas:

Em 6.1 a solução é agora

$$C_2^9 \times C_3^7 = \binom{9}{2, 3, 4}.$$

Por outro lado, a solução de 6.2 será também

$$C_2^9 \times C_3^7 = \binom{9}{2, 3, 4}.$$

Isto pode parecer à primeira vista surpreendente; contudo, como veremos já de seguida, acontece sempre que quaisquer dois subconjuntos na partição têm cardinais diferentes. Consideremos o caso geral em que

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_i, n_i \in \mathbb{N}_0 \text{ e } n_i \neq n_j \text{ sempre que } i \neq j.$$

Em cada partição não ordenada de um conjunto com n elementos em r subconjuntos, subconjuntos estes tais que existe exactamente um de cada um dos cardinais $n_1, n_2, \ldots, n_r$, isto é,

$$\{|S_i| : i = 1, 2, \ldots, r\} = \{n_i : i = 1, 2, \ldots, r\},$$

podemos ordenar os conjuntos e reescrever os seus índices de modo a que $|S_i| = n_i$ para cada i. Deste modo, estamos a fazer corresponder a cada partição não ordenada de um conjunto com n elementos em r subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_r$ tais que

$$\{|S_i| : i = 1, 2, \ldots, r\} = \{n_i : i = 1, 2, \ldots, r\},$$

uma partição ordenada desse conjunto em r subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_r$ tais que $|S_i| = n_i$ para cada i. Uma vez que os números $n_1, n_2, \ldots, n_r$ são distintos dois a dois, esta correspondência é uma bijecção, o que explica porque é que neste caso os dois tipos de partições correspondem.

Caso contrário, se existem pelo menos dois conjuntos na partição com cardinais iguais, já os dois tipos de partição diferem; por exemplo, se $n_1 = n_2$, às partições ordenadas distintas $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_r)$ e $(S_2, S_1, S_3, \ldots, S_r)$ corresponde a mesma partição não ordenada $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_r\}$.

6.4. Teorema. *Seja S um conjunto com n elementos. O número de partições não ordenadas de S em r subconjuntos tais que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots t\}$, r_i de entre eles possuem n_i elementos ($r_i \in \mathbb{N}_0$, $n_i \in \mathbb{N}_0$, $n_i \neq n_j$ para $i \neq j$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$, $r_1 n_1 + r_2 n_2 + \cdots + r_t n_t = n$) é igual a*

$$\frac{n!}{r_1!(n_1!)^{r_1} r_2!(n_2!)^{r_2} \cdots r_t!(n_t!)^{r_t}}.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto de todas as partições ordenadas de S em r subconjuntos tais que os primeiros r_1 subconjuntos contêm n_1 elementos, os seguintes r_2 subconjuntos contêm n_2 elementos, e assim sucessivamente, até aos últimos r_t subconjuntos que contêm n_t elementos cada um. Pelo teorema anterior existem

$$\frac{n!}{(n_1!)^{r_1}(n_2!)^{r_2} \cdots (n_t!)^{r_t}}$$

partições destas. Cada uma delas pode ser obtida em dois passos:

(1) Construindo uma partição não ordenada de S em r subconjuntos tais que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, r_i de entre eles possuem r_i objectos;

(2) Reordenando esses subconjuntos de modo a obter a partição ordenada desejada.

O número de maneiras diferentes de realizar o passo (1) é o que queremos determinar. O passo (2) pode ser realizado em $r_1! r_2! \ldots r_t!$ modos diferentes, uma vez que podemos colocar os subconjuntos de cardinal n_1 nas primeiras r_1 posições, de $r_1!$ maneiras diferentes, os subconjuntos de cardinal n_2 nas seguintes r_2 posições, de $r_2!$ maneiras diferentes, e assim sucessivamente.

Concluindo, o número de maneiras de realizar o passo (1) é igual a

$$\frac{\binom{n}{n_1,\ldots,n_1,n_2,\ldots,n_2,\ldots,n_t,\ldots,n_t}}{r_1!r_2!\ldots r_t!} = \frac{\frac{n!}{(n_1!)^{r_1}(n_2!)^{r_2}\cdots(n_t!)^{r_t}}}{r_1!r_2!\ldots r_t!} = \frac{n!}{r_1!(n_1!)^{r_1} r_2!(n_2!)^{r_2} \cdots r_t!(n_t!)^{r_t}}. \blacksquare$$

Observe que, no caso $r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 1$, t é igual a r e a fórmula de 6.4 reduz-se à de 6.3, o que torna a confirmar como nesse caso os dois tipos de partições coincidem.

Consideremos novamente os Problemas 6.1 e 6.2, mas suponhamos desta vez que os três grupos poderão conter qualquer número de elementos entre 0 e 9 (inclusivé). De quantas maneiras pode ser feita a distribuição?

Quanto a 6.1, o que se pede agora é o número PO_3^9; fazer uma distribuição dos 9 alunos $a_1, a_2, \ldots, a_9$ por três grupos G_1, G_2, G_3 corresponde a escolher para cada a_i o índice j do grupo G_j a que a_i vai pertencer ($i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$). Por exemplo, à distribuição

$$G_1 = \{a_1, a_5\}, \;\; G_2 = \{a_2, a_4, a_7, a_9\} \;\; G_3 = \{a_3, a_6, a_8\}$$

corresponde o arranjo com repetição

$$1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2,$$

pois

Aluno	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
Grupo	1	2	3	2	1	3	2	3	2

Como, para cada a_i, temos 3 hipóteses diferentes de escolher o índice j, é claro que teremos, pelo Princípio da Multiplicação, $PO_3^9 = 3^9$ maneiras distintas de realizar a distribuição.

Este raciocínio pode ser imediatamente generalizado a n estudantes e r grupos:

6.5. Teorema. *O número PO_r^n de partições ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos é igual a r^n.*

Demonstração. Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. A cada partição ordenada $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$ de S em r subconjuntos podemos fazer corresponder uma (e uma só) sequência ordenada de n componentes, escolhidas entre os elementos do conjunto $\{1, 2 \ldots, r\}$ de tal modo que a i-ésima componente seja j se e só se $a_i \in S_j$. Estabelecemos deste modo uma correspondência bijectiva entre o conjunto das partições ordenadas de S em r subconjuntos e o conjunto dos arranjos com repetição dos elementos de $\{1, 2, \ldots, r\}$, n a n. Logo o número de partições ordenadas de S em r subconjuntos é igual a $\overline{A}_n^r = r^n$. ∎

Podemos assim concluir que as partições ordenadas correspondem aos arranjos com repetição estudados no capítulo anterior.

E quanto à nova versão do Problema 6.2, isto é, o cálculo de P_3^9 e, mais geralmente, P_r^n?

6.6. Teorema. *O número de partições ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos não vazios ($r \leq n$) é igual a*

$$T_r^n := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_i^r (r-i)^n.$$

Demonstração. Seja X o conjunto de todas as partições ordenadas $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$ de S em r subconjuntos. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ diremos que a partição

$$(S_1, S_2, \ldots, S_r)$$

é *i-vazia* caso $S_i = \emptyset$. Denotemos por A_i o conjunto das partições de X que são i-vazias. É evidente que $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_r|$ é o número que procuramos. Mas, pelo teorema anterior, $|X| = r^n$, $|A_i| = (r-1)^n$, $|A_i \cap A_j| = (r-2)^n$ para $i \neq j$ e, mais geralmente,

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (r-k)^n$$

para quaisquer $i_1, i_2, \ldots, i_k$ distintos dois a dois. Logo, pelo Princípio da Inclusão--Exclusão,

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_r| = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_i^r (r-i)^n. \qquad \blacksquare$$

Observe (Exercício 4.6) que o número T_r^n coincide com o número de funções sobrejectivas de um conjunto com n elementos num conjunto com r elementos ($r \leq n$).

6.7. Corolário. *O número de partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos não vazios é igual a $\frac{1}{r!} T_r^n$.*

Demonstração. Basta observar que o número destas partições não ordenadas se obtem por divisão do número de partições ordenadas correspondente por $r!$, uma vez que, como já sabemos, cada partição não ordenada possui $r!$ cópias quando as partições se tornam ordenadas. $\blacksquare$

Os números

$$\frac{1}{r!} T_r^n$$

são habitualmente denotados por

$$S_r^n$$

e são chamados *números de Stirling de segunda espécie.*

Decorre imediatamente de 6.7 que:

6.8. Corolário. *O número de partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em subconjuntos não vazios é igual a $\sum_{i=1}^{n} S_i^n$.* ∎

Os números

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} S_i^n$$

chamam-se *números de Bell* ou *números exponenciais*. Portanto, o número de Bell B_n está para os números de Stirling de segunda espécie assim como 2^n está para os coeficientes binomiais (recorde a observação (1) sobre o Triângulo de Pascal).

Finalmente, temos:

6.9. Corolário. *O número P_r^n de partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos é igual a $\sum_{i=1}^{r} S_i^n$.*

Demonstração. Basta observar que o conjunto destas partições é a reunião disjunta dos conjuntos $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$, onde A_i denota o conjunto das partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em r subconjuntos sendo i deles vazios, ou seja, das partições não ordenadas de um conjunto com n elementos em $r-i$ subconjuntos. Por 6.7, $|A_i| = S_{r-i}^n$, pelo que esta reunião tem cardinal igual a

$$\sum_{i=0}^{r-1} S_{r-i}^n = \sum_{i=1}^{r} S_i^n. \qquad \blacksquare$$

Podemos agora concluir que a resposta à nova versão do Problema 6.2 é, no caso de admitirmos grupos vazios,

$$S_1^9 + S_2^9 + S_3^9 = 1 + 255 + 3025 = 3281$$

e, caso contrário,

$$S_3^9 = 3025.$$

Os números de Stirling de segunda espécie verificam uma propriedade análoga aos coeficientes binomiais:

6.10. Proposição. *Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq r < n$. Então*

$$S_{r+1}^{n+1} = S_r^n + (r+1)S_{r+1}^n.$$

Demonstração. O conjunto das partições não ordenadas de

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$$

em $r+1$ subconjuntos não vazios é a reunião disjunta dos conjuntos, respectivamente, das partições não ordenadas de S em $r+1$ subconjuntos, de modo que a_{n+1} esteja sozinho num desses subconjuntos, e das partições não ordenadas de S em $r+1$ subconjuntos tais que a_{n+1} não esteja sozinho em qualquer desses subconjuntos. Claramente o primeiro conjunto tem cardinal S_r^n. Como existem $r+1$ maneiras diferentes de colocar a_{n+1} num dos $r+1$ subconjuntos das partições não ordenadas de $S \setminus \{a_{n+1}\}$ em $r+1$ subconjuntos, o segundo conjunto tem cardinal igual a $(r+1)S_{r+1}^n$. Daí

$$S_{r+1}^{n+1} = S_r^n + (r+1)S_{r+1}^n. \qquad \blacksquare$$

Analogamente ao caso dos coeficientes binomiais, a identidade de 6.10 permite-nos construir imediatamente o Triângulo de Stirling de segunda espécie, sabendo que $S_1^n = S_n^n = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

n	S_1^n	S_2^n	S_3^n	S_4^n	S_5^n	S_6^n	S_7^n	S_8^n	S_9^n	S_{10}^n	$\cdots$
1	1										
2	1	1									
3	1	3	1								
4	1	7	6	1							
5	1	15	25	10	1						
6	1	31	90	65	15	1					
7	1	63	301	350	140	21	1				
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

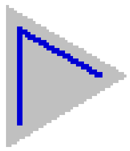
As somas dos elementos em cada linha dão-nos os números de Bell:

$$1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, \ldots$$

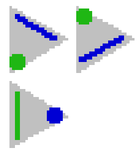
Observação. Existe outra interpretação combinatorial para o número S_r^n: qualquer número que seja o produto de n factores primos distintos pode ser escrito como um produto com r factores de S_r^n maneiras diferentes.

Uma outra forma habitual de enumerar os números de Stirling de segunda espécie e os números de Bell é através de diagramas representando os diferentes modos de particionar conjuntos, onde uma aresta liga elementos no mesmo subconjunto e um ponto representa um subconjunto singular:

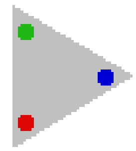
Números de Stirling de segunda espécie:



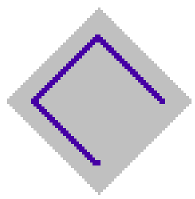
$S_3^1 = 1$



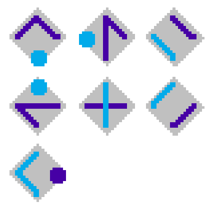
$S_3^2 = 3$



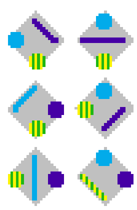
$S_3^3 = 1$



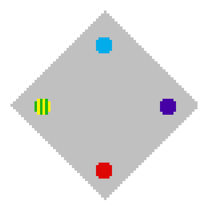
$S_4^1 = 1$



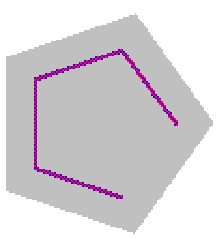
$S_4^2 = 7$



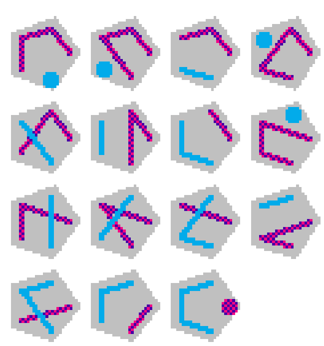
$S_4^3 = 6$



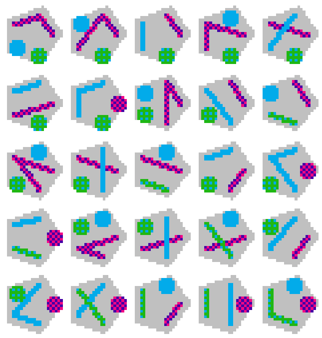
$S_4^4 = 1$



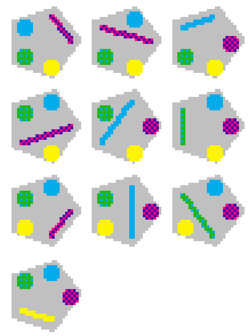
$S_5^1 = 1$



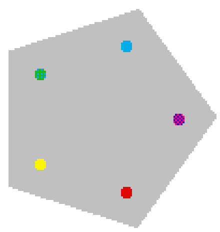
$S_5^2 = 15$



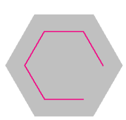
$S_5^3 = 25$



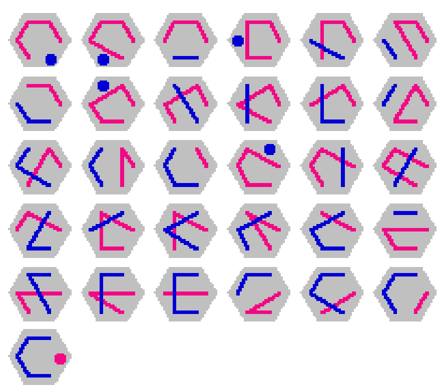
$S_5^4 = 10$



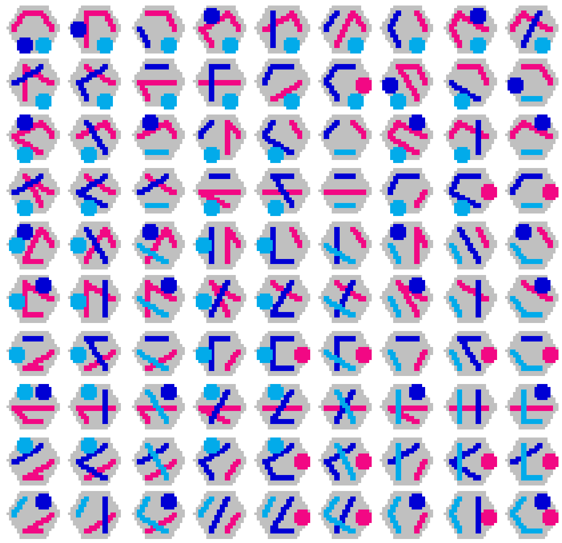
$S_5^5 = 1$



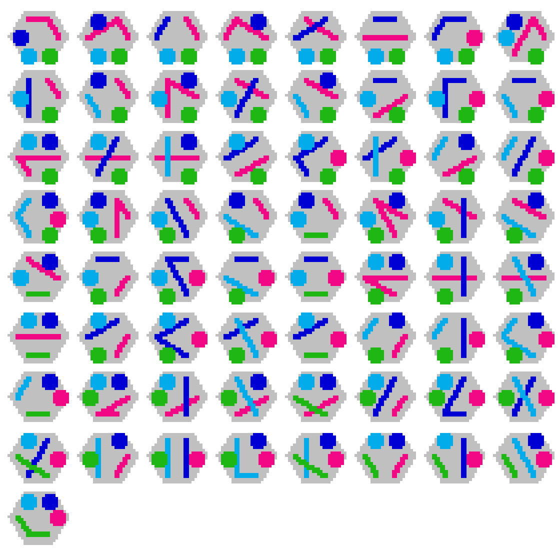
$S_6^1 = 1$



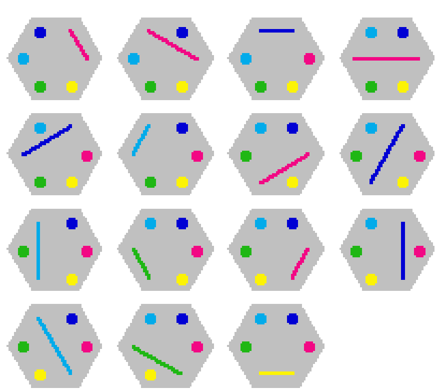
$S_6^2 = 31$



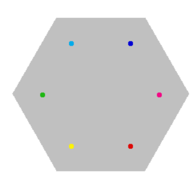
$S_6^3 = 90$



$S_6^4 = 65$

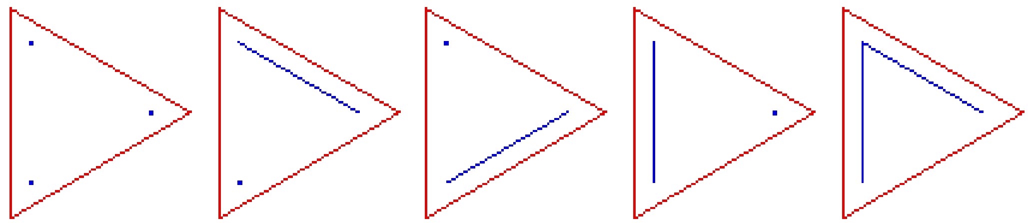


$S_6^5 = 15$

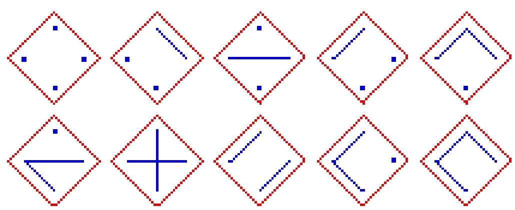


$S_6^6 = 1$

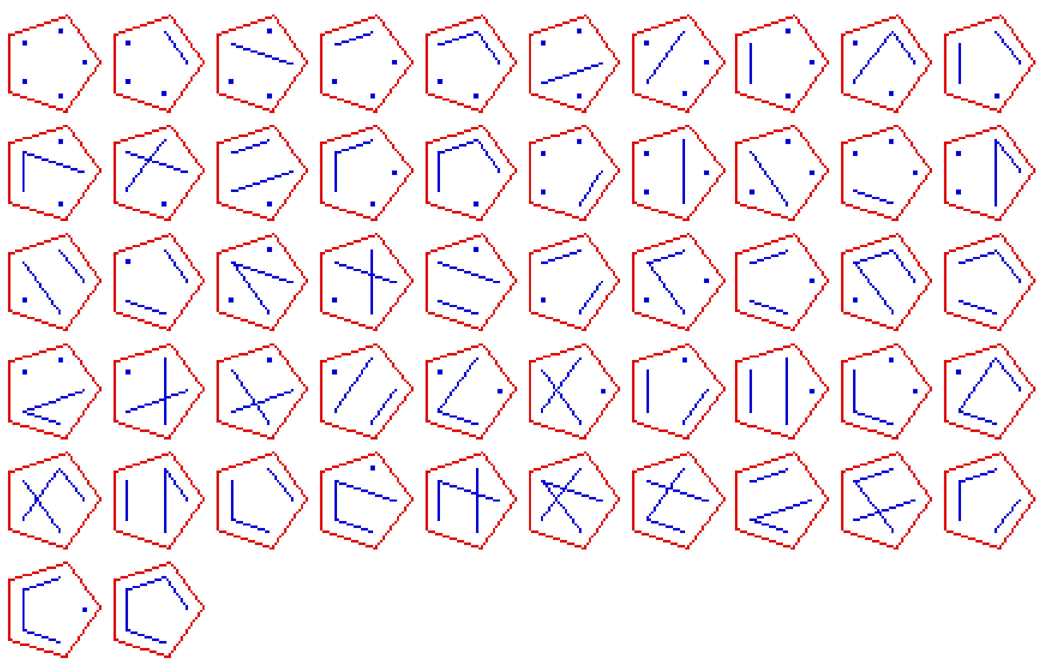
Números de Bell: $B_3 = 5$



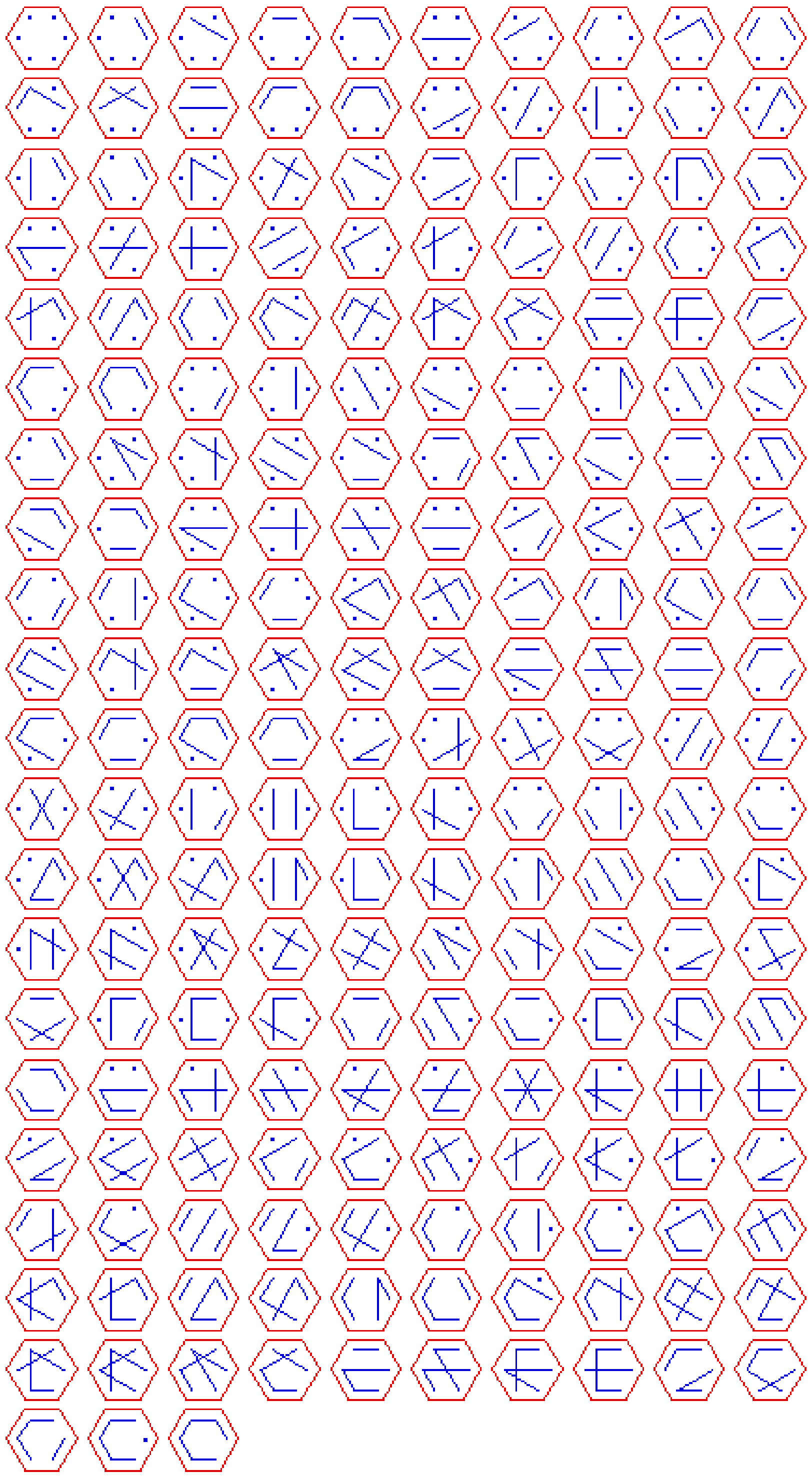
Números de Bell: $B_4 = 15$



Números de Bell: $B_5 = 52$



Números de Bell: $B_6 = 203$



Exercícios

6.1 Demonstre o Teorema 6.3 por indução sobre o número r de subconjuntos.

6.2 Dê um exemplo de conjuntos finitos A, B com $|A|, |B| \geq 4$ e uma função $f : A \to B$ tal que:

(a) f não é injectiva nem sobrejectiva;

(b) f é injectiva mas não é sobrejectiva;

(c) f é sobrejectiva mas não é injectiva;

(d) f é sobrejectiva e injectiva.

6.3 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Quantas funções de A para B existem? Quantas delas são injectivas? E quantas são sobrejectivas?

(b) Quantas funções de B para A existem? Quantas delas são sobrejectivas? E quantas são injectivas?

6.4 De quantas maneiras podemos distribuir 9 brinquedos por 3 crianças de modo que cada uma receba 3 brinquedos?

6.5 Sendo n um inteiro positivo, mostre que o número $\frac{(6n)!}{6!(n!)^6}$ é inteiro.

6.6 De quantas maneiras diferentes podemos colocar 5 velas de cores diferentes em:

(a) 3 bolos de cores diferentes?

(b) 3 bolos iguais?

6.7 12 bolas numeradas de 1 a 12 são distribuídas por 4 caixas A, B, C e D. De quantas maneiras podem ser feitas essas distribuições se:

(a) A ficar com 5 bolas, B com 3, C com 1 e D com 3?

(b) Cada caixa ficar com 3 bolas?

(c) Duas caixas ficarem vazias e as outras duas com 6 bolas cada?

6.8 Determine a probabilidade de exactamente s caixas ficarem vazias, quando n objectos diferentes são distribuídos por r caixas diferentes.

6.9 Um autocarro ao serviço de uma empresa sediada em A efectua todos os dias o percurso $A \to B \to C \to D \to E$ para levar a casa os seus 20 funcionários, $f_1, f_2, \ldots, f_{20}$, moradores nas zonas B, C, D e E.

(a) Qual é a probabilidade de identificar as zonas das moradias destes funcionários, com uma só tentativa, sabendo que na zona B apenas moram os funcionários $f_1, \ldots, f_5$ e na zona C apenas moram os funcionários $f_6, \ldots, f_{10}$?

(b) E no caso de só se saber que os funcionários $f_1, \ldots, f_5$ moram na zona B e os funcionários $f_6, \ldots, f_{10}$ moram na zona C?

6.10 Prove que, todo o número que seja o produto de n factores primos distintos, pode ser escrito como um produto de r factores, de S_r^n modos distintos.

6.11 Mostre, por indução sobre n, que

$$S_n^{n+m+1} = \sum_{i=0}^{n} i\, S_i^{m+i}.$$

7. A Tabela dos doze caminhos

O que vimos nos capítulos anteriores permite-nos obter, à laia de conclusão, a chamada Tabela dos doze caminhos, onde encontramos resumidas as soluções para um problema combinatorial muito importante (importante porque, no fundo, tipifica muitos dos problemas de contagem mais comuns):

"*Quantas funções há de um conjunto X (com n elementos) num conjunto Y (com r elementos)?*"

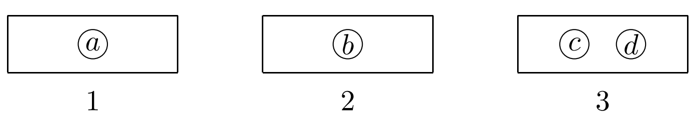
Analisemos o problema em todas as suas possibilidades:

(1) Podemos admitir três possibilidades quanto ao tipo de função a considerar: funções injectivas, sobrejectivas ou quaisquer.

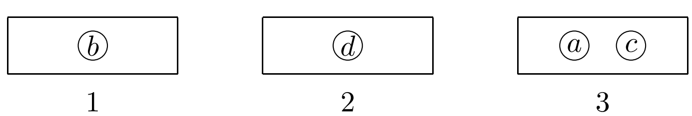
(2) Podemos identificar funções diferentes como sendo a mesma. Aqui as situações variam conforme olhemos para os objectos de X e Y como elementos distinguíveis ou indistinguíveis entre si. Por exemplo, se $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & Y \\ a & \longmapsto & 1 \\ b & \longmapsto & 2 \\ c & \longmapsto & 3 \\ d & \longmapsto & 3 \end{array}$$

que pode ser vista como uma maneira de colocar quatro bolas, etiquetadas de a a d, em três caixas, numeradas de 1 a 3:



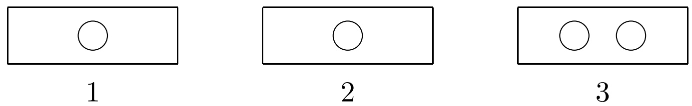
Se considerarmos os elementos de X indistinguíveis, qualquer função que coloque uma bola na caixa 1, uma bola na caixa 2 e duas bolas na caixa 3 é equivalente a f. É o caso da distribuição



que corresponde à função

$$\begin{array}{rcl} g : X & \longrightarrow & Y \\ a & \longmapsto & 3 \\ b & \longmapsto & 1 \\ c & \longmapsto & 3 \\ d & \longmapsto & 2. \end{array}$$

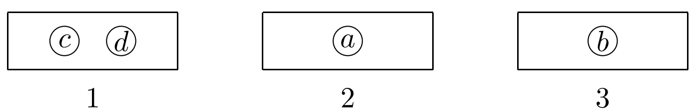
Em ambos os casos a distribuição é a mesma:



Outra possibilidade consiste em considerar os elementos de Y indistinguíveis. Neste caso, a função g já não é equivalente a f, uma vez que g não coloca as bolas c e d na mesma caixa. Um exemplo de função equivalente a f neste caso é

$$\begin{array}{rcl} h : X & \longrightarrow & Y \\ a & \longmapsto & 2 \\ b & \longmapsto & 3 \\ c & \longmapsto & 1 \\ d & \longmapsto & 1. \end{array}$$

correspondente a



(Se apagarmos os números da caixas ficamos com a mesma distribuição em h e f.)

Em conclusão, temos ao todo doze possibilidades de interpretar este problema. Na seguinte tabela, chamada *Tabela dos doze caminhos*, indicamos a solução para cada um dos casos; todos, com excepção do primeiro e terceiros na última linha (que veremos em seguida), foram resolvidos nos capítulos anteriores):

	f qualquer	f injectiva ($r \geq n$)	f sobrejectiva ($r \leq n$)
elementos X dist. elementos Y dist.	$\overline{A}_n^r = PO_r^n = r^n$	A_n^r	$T_r^n = r!S_r^n$
elementos X indist. elementos Y dist.	$\overline{C}_n^r = C_n^{n+r-1}$	C_n^r	C_{r-1}^{n-1}
elementos X indist. elementos Y dist.	$P_r^n = \sum_{i=1}^r S_i^n$	1	S_r^n
elementos X indist. elementos Y dist.	$p_r(n+r)$	1	$p_r(n)$

É óbvio que no terceiro caso da última linha, a solução é dada pelo número $p_r(n)$ de partições do número n em exactamente r parcelas positivas, sem atender à ordem das parcelas (as chamadas *r-partições numéricas de n*. No caso geral, não necessariamente sobrejectivo, a solução corresponde ao número de maneiras de decompor o número n como soma de r ou menos parcelas, isto é,

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_r(n).$$

7.1. Proposição. *Para $1 \leq r \leq n$, tem-se $p_r(n) = p_{r-1}(n-1) + p_r(n-r)$.*

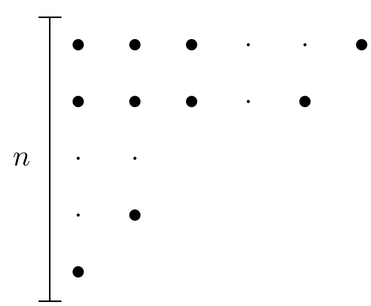
Demonstração. Seja $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ uma partição de n em r parcelas positivas. Se não ocorre a parcela 1 então $n-r = (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_r-1)$ é uma partição do número $n-r$ em r parcelas positivas. Reciprocamente, se $n-r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ é uma r-partição de $n-r$ então $n = (a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)$ é uma r-partição de n onde não ocorre a parcela 1. Assim, o número de r-partições de n sem a parcela 1 corresponde ao número $p_r(n-r)$.

Por outro lado, qualquer r-partição de n contendo pelo menos uma parcela igual a 1 é determinada pela partição do número $n-1$ que dela resulta pela omissão dessa parcela. Assim, o número de r-partições de n com pelo menos uma parcela igual a 1 corresponde ao número $p_{r-1}(n-1)$. ∎

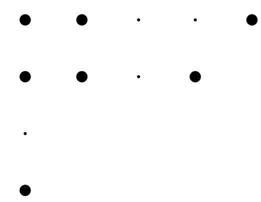
7.2. Corolário. $p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_r(n) = p_r(n+r)$.

Demonstração. Indução sobre n. ∎

Alternativamente, este corolário pode ser demonstrado directamente, usando os chamados *diagramas de Ferrers* para representar diagramaticamente as partições numéricas. Basta para isso observar que cada r-partição do número $n+r$ pode ser representada pelo diagrama



(onde as diversas parcelas da partição estão ordenadas de cima para baixo, a começar pela parcela maior, e cada parcela está representada numa linha com o número apropriado de pontos) e que, apagando a primeira coluna, obtemos uma partição de n em r, ou menos, parcelas,



o que mostra que existe uma correspondência bijectiva entre as r-partições numéricas de $n+r$ e as partições numéricas de n em r, ou menos, parcelas.

Exercícios

7.1 Apresente uma justificação breve para cada uma das entradas na tabela dos doze caminhos.

7.2 Sejam $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ e $[m]=\{1,2,\ldots,m\}$. Determine:

   (a) O número de funções estritamente crescentes de $[n]$ para $[m]$.

   (b) O número de funções crescentes de $[n]$ para $[m]$.

8. Relações de recorrência

No Exercício 1.2 da Introdução observámos que o número $f(n)$ de coberturas perfeitas de um tabuleiro com $2 \times n$ quadrículas satisfaz a relação $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$. Esta relação, conjuntamente com os valores iniciais $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$, determina univocamente a sequência dos números de coberturas perfeitas $f(1), f(2), f(3), \ldots$

A sucessão de Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ do problema (B4) da Introdução também é definida pela relação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$, mas desta vez sujeita às condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$. Como $f(n) = f_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, a solução de um destes dois problemas permitir-nos-à imediatamente obter a solução do outro.

Consideremos uma *sucessão* (infinita) de elementos de um conjunto S,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N}_0 & \rightarrow & S \\ & n & \mapsto & u(n). \end{array}$$

O valor $u(n)$ costuma representar-se simplesmente por u_n e é frequente apresentar uma sucessão dispondo sucessivamente as imagens da aplicação u:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots.$$

Muitas vezes uma sucessão é dada mediante a indicação do que se chama o seu *termo geral*, ou *termo de ordem* n (por exemplo, $u_n = n^2$, $u_n = \sin 2^n/(n+1)^2$, etc.). É uma situação cómoda pois, além de nesse caso ser possível calcular sem grandes problemas qualquer termo da sucessão, o estudo de várias propriedades (como a monotonia, convergência, etc.) fica muito facilitado.

Usaremos a notação (u_n) para nos referirmos à sucessão $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Como vimos nos exemplos acima, nem sempre uma sucessão é definida por indicação do seu termo geral, mas sim por uma *relação de recorrência*: são dados uns tantos termos iniciais da sucessão, $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, e cada um dos seguintes determina-se a partir dos k anteriores por intermédio de uma relação que permanece invariável, $u_k = f(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$, $u_{k+1} = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, etc. Estas são as chamadas relações de recorrência para a sucessão (u_n). Ao número k chama-se *ordem* da relação de recorrência.

Uma sucessão diz-se uma *solução* de uma relação de recorrência se os seus termos satisfizerem a relação. De entre todas as relações de recorrência destacam-se, não só pela sua simplicidade mas também pela frequência com que ocorrem, as *relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes*. São as do tipo

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n \geq k)$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_k$ constantes.

Exemplos.

(a) As progressões geométricas satisfazem uma relação de recorrência homogénea linear de primeira ordem:

$$u_n = au_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

(b) As progressões aritméticas podem ser vistas como sucessões satisfazendo relações de recorrência homogéneas lineares de segunda ordem:

De $u_{n-1} = u_{n-2} + h$ e $u_n = u_{n-1} + h$ obtem-se, subtraindo a primeira identidade da segunda,

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

(c) A sucessão de Fibonacci satisfaz uma relação de recorrência homogénea linear de segunda ordem.

Como em muitos problemas combinatoriais a solução aparece formulada em termos de uma relação de recorrência, torna-se imperativo saber manipulá-las e conhecer métodos que permitam obter uma fórmula explícita para o termo geral da respectiva sucessão.

Consideremos então o problema da determinação do termo geral de uma sucessão definida por uma relação de recorrência. Convirá desde já avisar que não existem métodos gerais que nos permitam resolver todas as relações de recorrência. Uma estratégia possível ("ingénua") será calcular um número razoável de termos e tentar intuir a lei de formação do termo geral, que pode depois ser confirmada pelo método de indução matemática. Com esta estratégia, algumas tentativas, mesmo em casos simples, mostrarão que não se trata de tarefa fácil.

Por exemplo, no caso das relações de recorrência lineares de primeira ordem, temos $u_1 = au_0$, $u_2 = au_1 = a^2u_0$, etc., sendo fácil ver que, para qualquer $n \geq 1$, $u_n = a^n u_0$. Está assim encontrado o termo geral neste caso. No entanto, para as de segunda ordem, dados u_1 e u_2 e duas constantes a e b, temos:

$$\begin{aligned}
u_2 &= au_1 + bu_0 \\
u_3 &= au_2 + bu_1 = (a^2+b)u_1 + abu_0 \\
u_4 &= au_3 + bu_2 = (a^3+2ab)u_1 + (a^2b+b^2)u_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Não é fácil descortinar aqui uma lei de formação que permita conjecturar o que deverá ser u_n em função de n, a, b, u_0 e u_1. É claro que para as sucessões recorrentes lineares de ordens superiores a situação será ainda pior.

Curiosamente, como veremos, o caso das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes é tratável de uma forma sistemática, embora as técnicas existentes se possam revelar muito trabalhosas na prática. Este método é completamente análogo ao usado para resolver equações diferenciais lineares homogéneas com coeficientes constantes. Apesar de ser um método indirecto e pouco natural, é elegante e engenhoso.

Restringemo-nos então à classe das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes, isto é, das relações de recorrência da forma

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n = k, k+1, \ldots) \qquad (*)$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são constantes. Podemos sempre supor que $a_k \neq 0$ pois, caso contrário, a relação reduz-se a uma de ordem inferior. O adjectivo "linear" refere-se ao facto de todos os valores de u ocorrerem como potências de expoente 1, enquanto que o adjectivo "homogéneo" refere-se ao facto de não existir termo independente (constante).

Por exemplo, $u_n = u_{n-1}^2 + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ não é linear, enquanto que $u_n = 3u_{n-1} + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ não é homogénea. Por outro lado, a relação $u_n = (n+2)u_{n-1} + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes (o primeiro coeficiente $n+2$ varia com n).

Associemos à relação de recorrência $(*)$, a equação

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0,$$

chamada *equação característica* de $(*)$. Esta equação tem k raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, chamadas *raízes características* de $(*)$. Claro que poderão ser números complexos, não todos distintos. Como $a_k \neq 0$, são todas não nulas.

8.1. Teorema. *Seja α um número complexo não nulo. A sucessão*

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^n, \ldots$$

é solução da relação de recorrência $(*)$ se e só se α é uma raiz característica.

Demonstração. A sucessão (u_n), onde $u_n = \alpha^n$, é uma solução de $(*)$ se e só se, para $n \geq k$,

$$\alpha^n = a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_k \alpha^{n-k}$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha^{n-k}(\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k) = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$, esta equação é ainda equivalente a

$$\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k = 0.$$

Portanto (α^n) é uma solução de $(*)$ se e só se α é uma raiz característica. ∎

8.2. Corolário. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ as raízes características de $(*)$. Para quaisquer constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ a sucessão de termo geral*

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$$

é uma solução de $(*)$.

Demonstração. É um exercício simples verificar que sempre que $(u_n^1), (u_n^2), \ldots, (u_n^t)$ são soluções de $(*)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_t$ são constantes então a sucessão de termo geral

$$u_n = c_1u_n^1 + c_2u_n^2 + \cdots + c_tu_n^t$$

ainda é solução de $(*)$ (trata-se do chamado Princípio da Sobreposição, que permite somar soluções para obter novas soluções). Combinando este facto com o Teorema 8.1 obtemos imediatamente 8.2. ∎

No caso das raízes características serem todas distintas podemos obter <u>todas</u> as soluções de $(*)$:

8.3. Teorema. *Suponhamos que as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ da relação de recorrência $(*)$ são distintas duas a duas. Neste caso, se uma sucessão de termo geral u_n é solução de $(*)$, existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que*

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma solução da relação de recorrência $(*)$. Uma vez que $(*)$, conjuntamente com os k valores iniciais $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, determinam completamente a sucessão (u_n), bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que a sucessão de termo geral $c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \cdots + c_k\alpha_k^n$ satisfaz $(*)$ e tem como primeiros k elementos os valores $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Pelo Corolário 8.2, bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \ldots + c_k = u_0 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = u_1 \\ \quad\vdots \\ c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \ldots + c_k\alpha_k^{k-1} = u_{k-1}. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de k equações lineares com k incógnitas. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

deste sistema é uma matriz muito especial, chamada *matriz de Vandermonde*. O seu determinante é dado por

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

(a prova deste facto encontra-se em muitos livros de Álgebra Linear). Como as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são todas distintas, este determinante é diferente de zero. Isto quer dizer que o sistema possui exactamente uma solução. ∎

Exemplos. As raízes da equação característica $x^2 - x - 1 = 0$ da relação de recorrência satisfeita pelos números de Fibonacci são o *número de ouro* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o seu conjugado $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então, pelo Teorema 8.3, os números de Fibonacci são dados por

$$f_n = c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

para algum par de constantes c_1 e c_2. As condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$ (ou $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$) permitem-nos determinar tais constantes. Com efeito,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = f_0 = 0 \\ \\ c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = f_1 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Concluindo, os números de Fibonacci satisfazem a Fórmula de Binet[20]

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big] \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Fica assim resolvido o Problema (B4) da Introdução: o número de pares de coelhos existentes na ilha ao fim de n meses era igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

[20] A expressão do n-ésimo número de Fibonacci f_n foi determinada pelo matemático francês Jacques-Philipe-Marie Binet (1786-1856). Esta fórmula foi também obtida independentemente pelos matemáticos De Moivre (1667-1754) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

Consequentemente, o número de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$ é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big].$$

Consideremos um outro exemplo. Se $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 2)$ com $u_0 = 2$ e $u_1 = 3$, neste caso obtemos $c_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n} + \frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+3}, \end{aligned}$$

pois $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5}$. Esta é a solução do seguinte problema:

> *Consideremos dois símbolos 0 e 1 e as sequências de comprimento n com eles construídas. Em quantas destas sequências não aparecem dois zeros consecutivos?*

Se as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ não forem todas distintas então

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \tag{8.3.1}$$

não é uma solução geral da relação de recorrência. Por exemplo, a relação de recorrência $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ tem como equação característica $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$. Neste caso (8.3.1) é igual a

$$u_n = c_1 2^n + c_2 2^n = (c_1 + c_2)2^n = c2^n$$

onde $c = c_1 + c_2$ é uma constante. Temos então uma só constante c e não será sempre possível escolhê-la de modo a que os dois valores iniciais u_1 e u_2 sejam satisfeitos. Por exemplo, se $u_0 = 1$ e $u_1 = 3$ teria que ser $c = 1$ e $2c = 3$ o que é manifestamente impossível. Portanto $u_n = c2^n$ não é uma solução geral daquela relação (isto é, nem toda a solução da relação de recorrência pode ser expressa na forma $c2^n$ para alguma constante c).

O teorema seguinte, que não demonstraremos, diz-nos como determinar uma solução geral das relações de recorrência cuja equação característica possui raízes repetidas. A ideia da demonstração é a mesma da de 8.3 mas evidentemente mais trabalhosa e técnica. Pode ser consultada em [3] (p. 103-105).

8.4. Teorema. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ as raízes distintas da equação característica da relação de recorrência $(*)$, com multiplicidades, respectivamente, $e_1, e_2, \ldots, e_t$. Uma sucessão de termo geral u_n é solução de $(*)$ se e só se existem constantes*

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1e_1}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2e_2}, \ldots, c_{t1}, c_{t2}, \ldots, c_{te_t}$$

tais que

$$\begin{aligned} u_n \;=\; & \left(c_{11} + c_{12}n + \cdots + c_{1e_1}n^{e_1-1}\right)\alpha_1^n + \\ & \left(c_{21} + c_{22}n + \cdots + c_{2e_2}n^{e_2-1}\right)\alpha_2^n + \\ & + \cdots + \\ & \left(c_{t1} + c_{t2}n + \cdots + c_{te_t}n^{e_t-1}\right)\alpha_t^n. \end{aligned}$$

Exemplo. Determinemos a solução da relação de recorrência

$$u_n = -u_{n-1} + 3u_{n-2} + 5u_{n-3} + 2u_{n-4} \quad (n = 4, 5, \ldots)$$

sujeita às condições iniciais $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2$. A equação característica $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ tem raízes -1 e 2, sendo -1 raiz de multiplicidade 3. Portanto a parte da solução geral correspondente à raiz -1 é

$$c_{11}(-1)^n + c_{12}n(-1)^n + c_{13}n^2(-1)^n,$$

enquanto que a parte correspondente à raiz 2 é $c_{12}2^n$. As constantes estão sujeitas às condições iniciais

$$\begin{cases} c_{11} + c_{21} & = \; 1 \\ -c_{11} - c_{12} - c_{13} + 2c_{21} & = \; 0 \\ c_{11} + 2c_{12} + 4c_{13} + 4c_{21} & = \; 1 \\ -c_{11} - 3c_{12} - 9c_{13} + 8c_{21} & = \; 2, \end{cases}$$

pelo que, resolvendo o sistema, $c_{11} = 7/9$, $c_{12} = -1/3$, $c_{13} = 0$ e $c_{21} = 2/9$. Em conclusão, a solução é

$$u_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{1}{9}2^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

O sucesso deste método depende da nossa capacidade em determinar as raízes da equação característica, o que poderá por vezes não ser possível. No caso de tal ser possível, será ainda necessário resolver um sistema de equações lineares. Se a ordem da relação de recorrência for k, este sistema tem k equações com k incógnitas. Portanto a aplicação deste método, na prática, poderá ser muito problemática.

Se a relação de recorrência não for homogénea ou linear, com coeficientes constantes, não se conhecem métodos para a resolver de uma forma sistemática. Com efeito, exceptuando alguns tipos de relações não homogéneas (como veremos no final deste capítulo), cada caso tem que ser analisado individualmente. Por exemplo, para resolver a relação de recorrência não homogénea $u_n = u_{n-1} + n^3$, para $n = 1, 2, \ldots$, sujeita à condição $u_0 = 0$, podemos, por sucessivas iterações, obter

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + n^3 \\ &= u_{n-2} + (n-1)^3 + n^3 \\ &= \cdots \\ &= u_1 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3. \end{aligned}$$

Assim, u_n é a soma dos primeiros n cubos. Podemos determinar uma expressão simples para esta soma? Usando a relação de recorrência podemos determinar os primeiros valores de u_n e tentar encontrar um padrão:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2 \\ u_3 &= 9 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2 \\ u_4 &= 36 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\ u_5 &= 100 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2. \end{aligned}$$

Como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

podemos conjecturar que

$$u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

o que pode ser confirmado pelo método de indução matemática (Exercício). Para mais exemplos veja ([3], p. 106-112).

Para terminar, vejamos que no caso não homogéneo, em diversos casos, é possível uma abordagem sistemática que nos conduza à solução. Uma recorrência linear não necessariamente homogénea de coeficientes constantes é dada por uma equação do tipo

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n), \tag{8.4.1}$$

onde o termo independente $f(n)$ é uma função de n que toma valores reais. A uma recorrência deste tipo podemos, esquecendo a função f, associar a recorrência homogénea

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}. \tag{8.4.2}$$

Será de esperar que as soluções de (8.4.1) estejam relacionadas com as soluções de (8.4.2). De facto, é fácil provar que:

8.5. Proposição. *Seja*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n)$$

uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes e seja (α_n) *uma solução desta relação de recorrência. Se* (β_n) *é também uma solução dessa relação de recorrência, então a sucessão* $(\gamma_n) = (\beta_n - \alpha_n)$ *é uma solução da relação de recorrência homogénea*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}.$$

Reciprocamente, se (γ_n) *é uma solução desta relação de recorrência homogénea, então a sucessão* $(\beta_n) = (\alpha_n + \gamma_n)$ *é uma solução da relação de recorrência inicial.*

Assim, para determinar a expressão geral das soluções de uma dada relação de recorrência linear com coeficientes constantes, bastará:

(1) Obter a expressão geral das soluções (γ_n) da relação de recorrência homogénea associada;

(2) Identificar uma solução particular (β_n) da relação de recorrência dada;

(3) A expressão geral das soluções (α_n) da relação de recorrência é dada pela soma $(\alpha_n) = (\beta_n + \gamma_n)$.

O passo (1) pode realizar-se pelo método apresentado no caso homogéneo, mas a realização de (2) depende da função f envolvida (em geral, não há nenhuma garantia que (2) se possa efectuar de modo fácil; os casos mais simples são aqueles em que f é polinomial ou exponencial). A proposição seguinte, que não demonstraremos, fornece-nos soluções particulares para os casos mais simples e frequentes.

8.6. Proposição. *Seja*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n)$$

uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes, e seja

$$x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1} x - a_k \qquad (*)$$

a equação característica da relação de recorrência homogénea que lhe está associada.

(1) *Se* $f(n) = b\lambda^n$ *para alguns números reais não nulos* b *e* λ *então:*

  (a) *se* λ *não for uma raiz de* $(*)$*, existe um número real* β*, univocamente determinado por* b*, tal que a sucessão* $(\beta\lambda^n)$ *é solução da relação de recorrência dada;*

(b) *se λ for uma raiz de $(*)$ com multiplicidade m, existe um número real β, univocamente determinado por b, tal que a sucessão $(\beta n^m \lambda^n)$ é solução da relação de recorrência dada.*

(2) *Se $f(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_r n^r$ para algum número natural $r \geq 1$ e alguns números reais $b_0, b_1, \cdots, b_r$ com $b_r \neq 0$, então:*

(a) *se 1 não for uma raiz de $(*)$, existem números reais $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_r$, univocamente determinados por $b_0, b_1, \cdots, b_r$, tais que a sucessão*

$$(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)$$

é solução da relação de recorrência dada;

(b) *se 1 for uma raiz de $(*)$ com multiplicidade m, existem números reais $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_r$, univocamente determinados por $b_0, b_1, \cdots, b_r$, tais que a sucessão*

$$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r))$$

é solução da relação de recorrência dada.

(3) *Se $f(n) = bn^r \lambda^n$ para algum número natural $r \geq 1$ e alguns números reais não nulos b e λ, então:*

(a) *se λ não for uma raiz de $(*)$, existem números reais $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_r$, univocamente determinados por b, tais que a sucessão*

$$((\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$$

é solução da relação de recorrência dada;

(b) *se λ for uma raiz de $(*)$ com multiplicidade m, existem números reais $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_r$, univocamente determinados por b, tais que a sucessão*

$$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$$

é solução da relação de recorrência dada.

Exercícios

8.1 Seja $a_{n+1} - ca_n = 0$ $(n \geq 0)$ uma relação de recorrência. Sabendo que $a_3 = 153/49$ e $a_5 = 1377/2401$, determine c.

8.2 Determine a solução de cada uma das seguintes relações de recorrência:

(a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0$, $n \geq 0$;

(b) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_1 = 5$;

(c) $a_n = 7a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_2 = 98$;

(d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$;

(e) $a_n^3 = 7a_{n-1}^3$, $n \geq 1$, $a_0 = 3$;

(f) $5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1}$, $n \geq 3$, $a_3 = -30$;

(g) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 12$;

(h) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$;

(i) $a_{n+3} - 2a_{n+2} + 8a_n = 4a_{n+1}$, $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

8.3 Pretendemos transmitir mensagens em código através de um dado canal de comunicação. Essas mensagens são formadas por palavras de comprimento $n \geq 1$, usando somente as letras a, b e c e sujeitas à condição "não podem aparecer palavras com dois a consecutivos". Denotemos por $t(n)$ o *tamanho* do código, isto é, o número de palavras que podemos transmitir com este código.

(a) Estabeleça uma relação de recorrência que $t(n)$ satisfaça.

(b) Determine explicitamente o tamanho do código, resolvendo a relação de recorrência.

8.4 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de sequências ordenadas com elementos iguais a 1 ou 2 cuja soma é igual a n. Determine a_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

8.5 Determine a solução da relação de recorrência $H(n) = 2H(n-1) + 1$ $(n \geq 1)$, sujeita à condição inicial $H(0) = 0$.

8.6 Cada semente de uma determinada planta produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Seja s_n o número de sementes produzidas, a partir de uma semente plantada hoje, daqui a n anos (suponha que, sempre que uma semente é produzida, ela é imediatamente plantada).

(a) A que é igual s_1 e s_2?

(b) Estabeleça uma relação de recorrência para s_n.

(c) Determine s_n.

9. Funções geradoras

Estudámos até agora diversos métodos de resolução de problemas de contagem. A partir dos princípios da adição e da multiplicação, deduzimos várias fórmulas para os arranjos, combinações e partições. Em seguida, deduzimos o princípio da inclusão-exclusão e vimos como se podia aplicar na resolução de certos problemas. Discutimos ainda a importância das relações de recorrência e apresentámos alguns métodos de resolução de relações de recorrência. No entanto, pode tornar-se muito difícil encontrar a relação de recorrência que descreva a solução de um dado problema, e mesmo que o consigamos fazer, pode tornar-se muito difícil a sua resolução. Será pois conveniente termos à disposição mais métodos. Neste último capítulo vamos apresentar, em traços gerais, o método das funções geradoras, devido a Euler[21]. É um método muito potente, com muitas aplicações. Como afirma Hamming, "*you cannot go very far in discrete mathematics without using generating functions — meaning infinite series, differentiation and integration*"[23]. Discutiremos dois tipos de aplicações das funções geradoras à resolução de problemas combinatoriais. Primeiro, mostraremos como modelam e resolvem problemas de contagem. Depois veremos sucintamente como as relações de recorrência podem ser resolvidas usando funções geradoras.

Habitualmente em Combinatória procuramos contar uma determinada quantidade u_n que depende de um parâmetro n. Podemos formalizar a dependência de n através de uma sequência de valores desconhecidos $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. O objectivo será determinar o termo geral desta sucessão. As funções geradoras providenciam um modo simples de "codificar" uma tal sequência, que pode ser rapidamente "descodificada" de maneira a determinarmos os seus termos. O "truque" consiste em descobrir como calcular a função geradora para a sequência, sem conhecer a sequência. O método permite assim determinar a quantidade desconhecida u_n de modo indirecto, mas bastante eficaz.

Comecemos por um exemplo académico simples, mas bastante motivador:

Problema. *Determine o número de soluções inteiras da equação* $a+b+c=17$*, onde* $2 \leq a \leq 5$*,* $3 \leq b \leq 6$ *e* $4 \leq c \leq 8$.

Solução. O problema é tão simples que podemos fazer uma enumeração directa das soluções:

[21] As raízes deste método encontram-se no trabalho de De Moivre, em 1720; foi desenvolvido por Euler em 1748, na resolução de problemas de partições, tendo sido tratado em pormenor, mais tarde, por Laplace[22].

[23] R. W. Hamming, *Calculus and Discrete Mathematics*, College Journal of Mathematics 15 (1984) 388.

a	b	c
3	6	8
4	5	8
4	6	7
5	4	8
5	5	7
5	6	6

Existem assim seis soluções para o problema.

Vejamos como as funções geradoras poderão ser utilizadas para resolver este problema. Para isso introduzamos três polinómios $p_a = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, $p_b = x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ e $p_c = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$, um para cada variável. Multiplicando-os obtemos um polinómio $p(x)$ envolvendo potências de x com expoentes entre 9 e 19. Este polinómio é um exemplo de função geradora. Como $a + b + c = 17$, temos que procurar o coeficiente de x^{17} em $p(x)$. Com efeito, de quantas maneiras podemos formar a décima sétima potência de x em $p(x)$? Por exemplo, podemos escolher x^3 de p_a, x^6 de p_b e x^8 de p_c e multiplicar estes monómios. Esta é só uma das maneiras de obter x^{17} e corresponde à solução $a = 3$, $b = 6$ e $c = 8$. Por outras palavras, toda a solução do problema corresponde exactamente a uma maneira de obter a décima sétima potência de x em $p(x)$. Portanto o número de soluções do problema é igual ao coeficiente de x^{17} em

$$p(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8).$$

Efectuando esta multiplicação polinomial, não é difícil concluir que esse coeficiente é 6. (Note que o cálculo deste coeficiente envolve pelo menos tanto trabalho quanto a enumeração directa das soluções. Contudo, o método aqui ilustrado pode ser utilizado com eficiência, como veremos, na resolução de problemas mais complicados.) ∎

Dada uma sucessão de números reais $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, chama-se *função geradora* desta sucessão à série de potências

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots.$$

Como o nosso objectivo é apenas dar uma ideia geral da "mecânica" do uso das funções geradoras, passaremos por cima das questões de convergência que ocorrem nas séries de potências. Para os nossos propósitos, podemos pensar em $f(x)$ como sendo uma série de potências *formal*, onde os símbolos $x^0 = 1, x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ são meros símbolos algébricos ou marcas formais para identificar os diversos termos da sucessão $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Quando apropriado, faremos observações, sem demonstração, sobre a convergência da série.

Como uma sequência finita $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ pode ser vista como uma sequência infinita $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ onde $u_{n+1} = 0, u_{n+2} = 0, \ldots$, a definição acima associa uma função geradora a qualquer sequência, finita ou infinita, de números. A série será finita (ou seja, um polinómio) caso a sucessão seja finita e infinita caso a sucessão seja infinita. Neste último caso pensaremos em x como tendo sido escolhido de modo a que a série convirja.

Exemplos. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. A função geradora $f_n(x)$ da sequência de números binomiais

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n} \tag{9.1}$$

é

$$f_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Pelo Teorema Binomial, $f_n(x) = (1+x)^n$. A expressão $(1+x)^n$ é assim uma maneira sucinta de "codificar" a sequência de números binomiais (9.1).

É usual estender-se o domínio de definição dos números binomiais $\binom{n}{r}$ de modo a permitir que n seja um número real arbitrário e r um inteiro. Isto é feito definindo

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r+1)}{r!}$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Z}^+$, $\binom{\alpha}{0} = 1$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\binom{\alpha}{r} = 0$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Z}^-$. A Fórmula de Pascal continua válida neste caso geral; o Teorema Binomial (habitualmente apelidado, neste caso geral, de Fórmula do Binómio de Newton ou Teorema Binomial de Newton) afirma que

$$(x+y)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r y^{\alpha-r}$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}$ satisfazendo $|x/y| < 1$. Neste caso geral, a função geradora $f_\alpha(x)$ para a sucessão de números binomiais

$$\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \ldots, \binom{\alpha}{n}, \ldots$$

é

$$f_\alpha(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots = (1+x)^\alpha.$$

Antes de avançar para outro exemplo, vejamos rapidamente uma aplicação interessante do Teorema Binomial de Newton ao cálculo de raízes quadradas. O Teorema Binomial diz-nos que

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{9.2}$$

se $|x| < 1$. Usemos este resultado para calcular, por exemplo, $\sqrt{30}$. Como $|29| > 1$, não podemos utilizar (9.2) directamente. Contudo, $\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = 5\sqrt{1+0.2}$, pelo que podemos aplicar (9.2) com $x = 0.2$. Obtemos

$$\sqrt{30} = 5[1 + \frac{1}{2}(0.2) - \frac{1}{8}(0.2)^2 + \frac{1}{16}(0.2)^3 - \cdots] \approx 5.4775.$$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Determinemos agora a função geradora $f_n(x)$ da sucessão de números

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots,$$

sendo u_r o número de combinações com repetição de n elementos, r a r. Vimos no Capítulo 5 que

$$u_r = \overline{C}^n_r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Portanto

$$f_n(x) = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+r-1}{r}x^r + \cdots.$$

Pela Fórmula do Binómio de Newton podemos escrever

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-x)^k = (1-x)^{-n}, \tag{9.3}$$

pois, como facilmente se observa,

$$\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

Em particular, a função geradora da sucessão $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ é

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x},$$

e a função geradora de $1, 2, 3, \ldots, r, \ldots$ é

$$f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Em todos estes exemplos conseguimos exprimir $f(x)$ numa forma (codificada) simples. Conhecendo esta forma simples para $f(x)$, será sempre possível deduzir u_n, se não nos esquecermos da fórmula fechada para $f(x)$, descodificando esta fórmula, ou seja, desenvolvendo-a em série de potências e procurando o coeficiente de x^n. Contrariamente ao que a definição possa revelar, a utilidade das funções geradoras não está na construção da função geradora de uma dada sucessão (como fizemos nos exemplos anteriores) mas sim em raciocinar e aplicar esses passos em sentido inverso: tendo uma sucessão $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ definida por uma relação de recorrência, por exemplo, ou simplesmente, sabendo que o seu termo geral representa a solução desconhecida de um problema de contagem, a utilidade das funções geradoras reside no facto de que muitas vezes conseguimos, sem conhecer explicitamente os números $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, determinar uma fórmula para a sua função geradora e depois, desenvolvendo-a em série de potências, determinar os valores de $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ pretendidos. Por exemplo, suponhamos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \frac{x^2}{1-x}.$$

A que é igual u_k? Pela equação (9.3) temos, para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Consequentemente

$$f(x) = x^2 (\frac{1}{1-x}) = x^2(1 + x + x^2 + \cdots) = x^2 + x^3 + x^4 \cdots.$$

Portanto $(u_k) = (0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$.

Antes de avançarmos, façamos uma breve digressão pelos resultados sobre séries de potências (do cálculo infinitesimal) de que necessitaremos (mais pormenores podem ser consultados em praticamente qualquer livro de cálculo infinitesimal).

Uma série de potências é uma série (infinita) da forma $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$. Para $x = 0$ tal série é sempre convergente. Ou não converge para mais nenhum valor de x ou então existe um número positivo R (eventualmente ∞) tal que a série é convergente sempre que $|x| < R$. Neste último caso, o maior de tais R chama-se o *raio de convergência* da série.

As séries de potências aparecem no cálculo infinitesimal do seguinte modo. Existem muitas funções f para as quais

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \cdots \qquad (9.4)$$

A série de potências no lado direito de (9.4), para qualquer x em algum intervalo contendo 0, é chamado o *desenvolvimento de Maclaurin* de f em $x = 0$. Alguns dos mais conhecidos e úteis desenvolvimentos em série de Maclaurin são:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad \text{para } |x| < 1,$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \text{para } |x| < \infty,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad \text{para } |x| < \infty.$$

Uma das razões que tornam as séries de potências tão úteis é o facto de se poderem adicionar, multiplicar, dividir, compôr, derivar e integrar sem grande dificuldade.

Propriedade 1. Suponhamos $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k$. Então $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ e $f(x)/g(x)$ podem ser calculadas do seguinte modo (a divisão só poderá ser feita se, nos valores de x em questão, $g(x)$ não se anular):

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) x^k \\ &= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1)x + (u_2 + v_2)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= u_0 \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k + u_1 \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k + u_2 \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k + \cdots \\ &= u_0(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots) + u_1 x(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u_0}{\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k} + \frac{u_1 x}{\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k} + \frac{u_2 x^2}{\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k} + \cdots.$$

Se ambas as séries convergem para $|x| < R$, também $f(x)+g(x)$ e $f(x)g(x)$ convergem no mesmo intervalo. Se $g(0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ converge nalgum intervalo contendo 0.

Propriedade 2. Se $f(x) = g(t(x))$ e $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$ então $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k [t(x)]^k$ (se a série de potências para $g(t)$ converge em $|t| < S$ e $|t(x)| < S$ sempre que $|x| < R$ então a série de potências para $f(x)$ converge em $|x| < R$).

Propriedade 3. Se uma série de potências $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ converge em $|x| < R$, com $R > 0$, então a derivada e a primitiva de f podem ser calculadas derivando e primitivando termo a termo. Concretamente,

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} k u_k x^{k-1}$$

e

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x u_k t^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} u_k x^{k+1}.$$

Por exemplo, como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{1-x}\Big],$$

tem-se

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

Como tínhamos referido, as funções geradoras tornam-se úteis quando desconhecemos a sequência $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ e só conhecemos a respectiva função geradora. A partir desta tenta-se recuperar a sequência. Esta ideia permite resolver inúmeros problemas de contagem (e enumeração) que envolvam combinações. No Capítulo 5 desenvolvemos técnicas para contar combinações com repetição de n elementos r a r, quando determinadas restrições à repetição possam existir. Tais problemas, como vimos, são equivalentes à contagem das soluções de equações da forma $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$, onde cada z_i é um inteiro sujeito, eventualmente, a alguma restrição específica (recorde o Exemplo (b) da página 47, onde se prova que $\overline{C}^n_r$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$). As funções geradoras podem ser usadas para resolver problemas deste tipo, como ilustraremos nos exemplos que se seguem.

Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e seja u_r o número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, na qual cada objecto ocorre um número par de vezes. Determinemos a função geradora $f_n(x)$ da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$. É claro, da definição, que $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \cdots$; é também evidente que u_r é o número de soluções inteiras pares não negativas da equação $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$. Para isso consideremos a série de potências $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ e a sua n-ésima potência

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^n. \tag{9.5}$$

Quando desenvolvemos esta expressão, obtemos termos da forma

$$x^{z_1} x^{z_2} \cdots x^{z_n} = x^{z_1 + z_2 + \cdots + z_n},$$

onde x^{z_1} é um termo da primeira série de potências, x^{z_2} é um termo da segunda série de potências, etc. Em particular, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são inteiros pares não negativos. Portanto obtemos como resultado uma outra série de potências na qual o coeficiente de x^r é o número de soluções inteiras pares não negativas da equação $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$, ou seja, u_r. Consequentemente, (9.5) é a função geradora $f_n(x)$ para $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$. Mas

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Então

$$f_n(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^r} = 1 + nx^2 + \frac{n(n+1)}{2!}x^4 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^6 + \cdots$$

pelo que, para r par

$$u_r = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n + \frac{r}{2} - 1)}{\left(\frac{r}{2}\right)!} = \binom{n + \frac{r}{2} - 1}{\frac{r}{2}} = \overline{C}^n_{\frac{r}{2}}.$$

Observação. O resultado $u_r = \overline{C}^n_{\frac{r}{2}}$ obtido diz-nos que neste caso podíamos ter atacado o problema directamente, com um raciocínio puramente combinatorial; com efeito, para r par, existe uma bijecção entre o conjunto das combinações com repetição de n elementos, r a r, na qual cada objecto ocorre um número par de vezes, e o conjunto das combinações com repetição de n elementos, $\frac{r}{2}$ a $\frac{r}{2}$ (a cada uma das combinações $\mathcal{C}$ do primeiro tipo basta fazer corresponder a combinação em que cada elemento é repetido um número de vezes igual a metade do número de vezes que aparece repetido em $\mathcal{C}$).

De forma análoga, podemos determinar as funções geradoras associadas a outros problemas combinatoriais. Por exemplo:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}$$

é a função geradora da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$, onde u_r é o número de combinações com repetição de 3 elementos a_1, a_2, a_3, r a r, nas quais a_2 ocorre um número par de vezes e a_3 um número de vezes múltiplo de 3;

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{r_1})(1+x+x^2+\cdots+x^{r_2})\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{r_n})$$

é a função geradora da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ onde u_r é o número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, nas quais cada elemento a_i só pode aparecer repetido quando muito r_i vezes, isto é, $u_r = \overline{C}^n_r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$;

$$f_n(x) = \frac{x^n}{(1-x^2)^n}$$

é a função geradora para a sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ onde u_r é o número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, nas quais cada elemento a_i aparece um número ímpar de vezes. (Note que $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = 0$.)

Em todos os exemplos que vimos até agora, as funções geradoras permitiram-nos contar diversos tipos de combinações. Vejamos se também servem para contar arranjos.

A função geradora para os números A^n_r (com $n \in \mathbb{N}$ fixo) é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= A^n_0 + A^n_1 x + A^n_2 x^2 + \cdots + A^n_n x^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!} x^r. \end{aligned}$$

Infelizmente, não existe nenhuma maneira de simplificar esta expressão. No caso das combinações pudemos simplificar a respectiva expressão por causa do Teorema Binomial:

$$C^n_0 + C^n_1 x + C^n_2 x^2 + \cdots + C^n_n x^n = (1+x)^n.$$

Contudo, como $A_r^n = C_r^n \cdot r!$, podemos escrever

$$A_0^n \frac{x^0}{0!} + A_1^n \frac{x^1}{1!} + A_2^n \frac{x^2}{2!} + \cdots + A_n^n \frac{x^n}{n!} = (1+x)^n.$$

Isto quer dizer que A_r^n é o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ na expansão de $(1+x)^n$ e sugere a seguinte ideia: sendo (u_n) uma sequência arbitrária, a *função geradora exponencial* de (u_n) é a função definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 \frac{x^0}{0!} + u_1 \frac{x^1}{1!} + u_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + u_n \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Por exemplo, se $u_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, a respectiva função geradora exponencial é

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots + 1 \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= e^x. \end{aligned}$$

(Este exemplo justifica a escolha do adjectivo "exponencial".)

Como no caso das funções geradoras (ordinárias), pensamos em x como tendo sido escolhido de maneira a que a série convirja.

No caso $u_r = A_r^n$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, a função geradora exponencial é $(1+x)^n$, como vimos. Portanto, $(1+x)^n$ "codifica" a sucessão de números A_r^n $(r = 0, 1, 2, \ldots)$.

Mais um exemplo: a função geradora exponencial da sequência $(1, n, n^2, n^3, \ldots)$ é

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

Esta é pois a função geradora exponencial da sucessão de números $\overline{A}_r^n = n^r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$.

E no que respeita aos números $\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ com $r = 0, 1, 2, \ldots$, fixados $n \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}_0$?

9.1. Teorema. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Para $r = 0, 1, 2, \ldots$ seja u_r o número $\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. A função geradora exponencial $f_e(x)$ da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ é*

$$f_{r_1}(x) f_{r_2}(x) \ldots f_{r_n}(x), \tag{9.6}$$

onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$f_{r_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{r_i}}{r_i!}. \tag{9.7}$$

Demonstração. Seja

$$f_e(x) = u_0 + u_1 x + u_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + u_r \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

a função geradora exponencial de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$. Note que $u_r = 0$ para $r > r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, pelo que $f_e(x)$ é realmente uma série finita. Desenvolvendo os cálculos para a expressão em (9.6), obtemos termos da forma

$$\frac{x^{s_1}}{s_1!} \frac{x^{s_2}}{s_2!} \cdots \frac{x^{s_n}}{s_n!} = \frac{x^{s_1+s_2+\cdots+s_n}}{s_1! s_2! \ldots s_n!} \tag{9.8}$$

onde $0 \leq s_1 \leq r_1$, $0 \leq s_2 \leq r_2, \ldots, 0 \leq s_n \leq r_n$. Seja $r = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$. A expressão em (9.8) pode escrever-se na forma

$$\frac{x^r}{s_1! s_2! \ldots s_n!} = \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} \frac{x^r}{r!}.$$

Assim, o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ em (9.6) é

$$\sum \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} = \sum \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n},$$

onde o somatório se estende sobre todos os inteiros $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tais que $0 \leq s_1 \leq r_1$, $0 \leq s_2 \leq r_2, \ldots, 0 \leq s_n \leq r_n$ e $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = r$. Mas, como vimos no Capítulo 5, este somatório coincide precisamente com $\overline{A}_r^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Podemos assim concluir que

$$f_e(x) = f_{r_1}(x) f_{r_2}(x) \ldots f_{r_n}(x).$$

■

Com o mesmo tipo de raciocínio usado nesta demonstração, é possível calcular a função geradora exponencial de qualquer sequência cujos termos sejam os números de arranjos com repetição com determinado tipo de restrições adicionais. Com efeito, se em (9.7) definirmos também

$$f_\infty(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = e^x,$$

o teorema continua a ser válido se alguns dos números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ forem ∞ (isto é, os respectivos elementos puderem ser repetidos sem qualquer restrição).

Exemplos. (a) A função geradora exponencial da sequência $u_0, u_1, \ldots, u_r, \ldots$, sendo u_r o número de arranjos com repetição de n elementos, r a r, onde cada elemento aparece pelo menos uma vez, é claramente definida por

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots\right)^n = (e^x - 1)^n.$$

(b)

$$\Big(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots\Big)^n=\Big[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Big]^n$$

é a função geradora exponencial dos arranjos com repetição de n elementos, nos quais cada objecto ocorre repetido um número par de vezes.

(c)

$$\Big(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}\Big)\Big(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^6}{6!}\Big)\Big(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\Big)^{n-2}$$

é a função geradora exponencial da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$, onde u_r é o número de arranjos com repetição de n elementos, r a r, nas quais o primeiro elemento ocorre 0, 2 ou 5 vezes, o segundo elemento ocorre 1, 2 ou 6 vezes, não existindo qualquer restrição para o número de vezes que os restantes ocorrem.

Podemos assim resolver rapidamente qualquer problema de contagem de arranjos como, por exemplo:

Problema 1. *Determine o número de maneiras de colorir as quadrículas de um tabuleiro $1\times n$ com as cores vermelha, amarela e verde, de tal modo que as quadrículas a pintar de amarelo sejam em número par.*

Solução. Denotemos tal número por u_n, onde convencionamos $u_0 = 1$. A função geradora exponencial de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ é dada por

$$\begin{aligned} f_e(x) &= (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots)^2 \\ &= \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x} \\ &= \frac{1}{2}(e^{3x}+e^x) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(3^k+1)\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_n=\frac{3^n+1}{2}, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

■

Problema 2. *Em quantos números de n algarismos estes são todos ímpares e os algarismos 1 e 3 ocorrem um número par de vezes?*

Solução. Seja u_n tal número (definimos $u_0 = 1$). Neste caso $S = \{1, 3, 5, 7, 9, \}$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = \infty$, mas os algarismos 1 e 3 só podem ocorrer um número par de vezes (queremos assim contar os arranjos que contribuem para o número $\overline{A}^5_n(\infty,\infty,\infty,\infty,\infty) = \overline{A}^5_n = 5^n$ nos quais dois dos elementos só podem ocorrer um número par de vezes).

A função geradora exponencial de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ é igual a

$$\begin{aligned}
f_e(x) &= (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots)^3 \\
&= \Big(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Big)^2 e^{3x} \\
&= \Big(\frac{e^{2x}+1}{2}\Big)^2 e^{x} \\
&= \frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)e^x \\
&= \frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x) \\
&= \frac{1}{4}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}5^k\frac{x^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(5^k+2\times 3^k+1)\frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Então

$$u_n = \frac{5^n+2\times 3^n+1}{4}, \qquad n = 0,1,2,\ldots. \qquad \blacksquare$$

Estes dois problemas são realmente muito ilustrativos da utilidade das funções geradoras; com efeito, tente resolvê-los directamente, sem as utilizar!

As funções geradoras também fornecem um método de resolução de relações de recorrências lineares homogéneas com coeficientes constantes, alternativo ao estudado no Capítulo 8. Por exemplo, consideremos a relação de recorrência

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \qquad (n = 2,3,4,\ldots)$$

sujeita às condições iniciais $u_0 = 1$ e $u_1 = -2$. Seja

$$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n + \cdots$$

a função geradora da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Temos as seguintes equações:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
f(x) &=& u_0 &+& u_1x &+& u_2x^2 &+& \cdots &+& u_nx^n &+& \cdots \\
-5xf(x) &=& & & -5u_0x &-& 5u_1x^2 &-& \cdots &-& 5u_{n-1}x^n &-& \cdots \\
6x^2f(x) &=& & & & & 6u_0x^2 &+& \cdots &+& 6u_{n-2}x^n &+& \cdots
\end{array}$$

Adicionando-as obtemos:

$$(1-5x+6x^2)f(x) = u_0+(u_1-5u_0)x+(u_2-5u_1+6u_0)x^2+\cdots+(u_n-5u_{n-1}+6u_{n-2})x^n+\cdots$$

Como $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$ (para $n = 2, 3, 4, \ldots$), $u_0 = 1$ e $u_1 = -2$, temos

$$(1 - 5x + 6x^2)f(x) = u_0 + (u_1 - 5u_0)x = 1 - 7x.$$

Logo

$$f(x) = \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Será possível, a partir desta fórmula fechada para a função geradora $f(x)$, determinar os termos da sucessão $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$? Sim, usando o Teorema Binomial de Newton e o método das fracções parciais (do cálculo infinitesimal, utilizado na primitivação das funções racionais):

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$$

pelo que

$$\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 3x}$$

para algum par de constantes A e B. Determinemos A e B:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{(1 - 3x)A + (1 - 2x)B}{1 - 5x + 6x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 7x = (1 - 3x)A + (1 - 2x)B \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 7x = (A + B) + (-3A - 2B)x \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -3A - 2B = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad A = 5, B = -4.
\end{aligned}$$

Portanto

$$f(x) = \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{5}{1 - 2x} - \frac{4}{1 - 3x}.$$

Mas o Teorema Binomial de Newton afirma que, para $n \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|x| < \frac{1}{|t|}$,

$$(1 - tx)^{-n} = (-tx + 1)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-tx)^k,$$

ou seja,

$$\frac{1}{(1 - tx)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} t^k x^k.$$

Por outro lado, já observámos que

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n + k - 1}{k}.$$

Então
$$\frac{1}{(1-tx)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k x^k \qquad \text{para } |x| < \frac{1}{|t|}.$$

Aplicando ao nosso problema obtemos
$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots$$
e
$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^n x^n + \cdots.$$
Então
$$\begin{aligned} f(x) &= 5(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots) - 4(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^n x^n + \cdots) \\ &= 1 + (-2)x + (-16)x^2 + \cdots + (5 \times 2^n - 4 \times 3^n)x^n + \cdots. \end{aligned}$$

Em conclusão,
$$u_n = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$
Este método pode evidentemente ser utilizado com qualquer relação de recorrência linear homogénea com coeficientes constantes e mesmo em relações de recorrência mais gerais. Por exemplo:

Suponhamos que um código é formado por palavras formadas com o alfabeto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, contendo um número par de zeros. Seja u_n o número de palavras de comprimento n desse código. Esta sucessão satisfaz a relação de recorrência
$$u_n = 8u_{n-1} + 10^{n-1}$$
(verifique) com a condição inicial $u_1 = 9$. Apliquemos as funções geradoras para determinar uma forma explícita para u_n.

Para ser mais fácil a aplicação das funções geradoras começamos por estender a sucessão, definindo $u_0 = 1$; esta escolha é consistente com a condição inicial:
$$u_1 = 8u_0 + 10^0 = 8 + 1 = 9.$$

Seja
$$g(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n + \cdots$$
a função geradora da sequência $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Temos as seguintes equações:
$$\begin{array}{rcccccccccccc} g(x) & = & u_0 & + & u_1x & + & u_2x^2 & + & \cdots & + & u_nx^n & + & \cdots \\ -8xg(x) & = & & & -8u_0x & - & 8u_1x^2 & - & \cdots & - & 8u_{n-1}x^n & - & \cdots \end{array}$$
Adicionando-as obtemos
$$(1-8x)g(x) = u_0 + (u_1 - 8u_0)x + (u_2 - 8u_1)x^2 + \cdots + (u_n - 8u_{n-1})x^n + \cdots$$

Como $u_n - 8u_{n-1} = 10^{n-1}$ (para $n = 1, 3, 4, \ldots$) e $u_0 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
& (1-8x)g(x) = 1 + x + 10x^2 + \cdots + 10^{n-1}x^n + \cdots \\
\Leftrightarrow\quad & (1-8x)g(x) - 1 = x\sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \\
\Leftrightarrow\quad & (1-8x)g(x) - 1 = \frac{x}{1-10x} \\
\Leftrightarrow\quad & (1-8x)g(x) = \frac{1-9x}{1-10x} \\
\Leftrightarrow\quad & g(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o segundo membro em fracções parciais podemos escrever

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\Big).$$

Então

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(8^n + 10^n)x^n.$$

Consequentemente

$$u_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exercícios

9.1 Qual é a função geradora para o número u_n de maneiras de dar troco a n contos usando notas de 1, 2, 5 e 10 contos?

9.2 Apresente uma interpretação combinatorial para o coeficiente u_6 de x^6 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$. Utilize essa interpretação para determinar u_6.

9.3 Usando o Teorema Binomial, determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de:

(a) $\sqrt[3]{1+x}$;

(b) $(1+x)^{-2}$;

(c) $(1-x)^{-5}$;

(d) $(1+4x)^{\frac{1}{2}}$.

9.4 Cada uma de três pessoas atira um dado ao ar. Qual é a probabilidade de a pontuação totalizar 11 pontos?

9.5 Qual é a função geradora de (u_n), sendo u_n o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = n$, com $x_1 \geq 2$, $0 \leq x_2 \leq 3$ e $2 \leq x_3 \leq 5$?

9.6 Use funções geradoras para demonstrar a Fórmula de Pascal

$$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}.$$

(Sugestão: Utilize a identidade $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$.)

9.7 Determine o número de maneiras de colorir as quadrículas de um tabuleiro $1 \times n$ com as cores vermelha, verde, amarela e azul, de modo que o número de quadrículas a pintar de vermelho seja par, o mesmo acontecendo com as quadrículas a pintar de verde.

9.8 Em quantos números com n algarismos pertencentes a $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, os algarismos 4 e 6 ocorrem um número par de vezes cada um e os algarismos 5 e 7 ocorrem pelo menos uma vez cada um?

9.9 Resolva as seguintes relações de recorrência, utilizando funções geradoras:

(a) $u_n = 3u_{n-1} + 2$, sujeita à condição inicial $u_0 = 1$;

(b) $u_n = 3u_{n-1} + 4^{n-1}$, sujeita à condição inicial $u_0 = 1$.

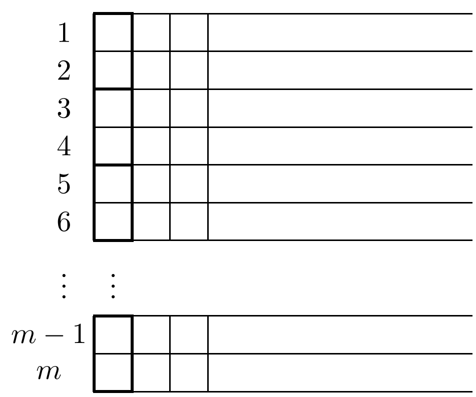
9.10 Use uma função geradora para deduzir uma fórmula explícita para os números de Fibonacci.

Apêndice: Soluções de exercícios seleccionados

Capítulo 1

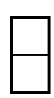
1.1. Se o tabuleiro possui uma cobertura perfeita então o dobro do número de peças na configuração deverá ser igual a mn. Portanto $2|mn$ pelo que $2|m$ ou $2|n$.

Reciprocamente suponhamos, sem perda de generalidade, que m é par. Nesse caso é evidente que cada coluna pode ser perfeitamente coberta (basta alinhar sucessivamente $m/2$ peças)

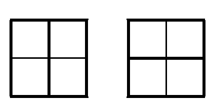


pelo que qualquer número n de colunas pode também ser coberto de modo perfeito.

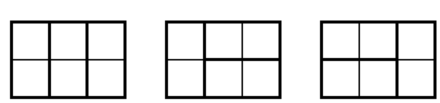
1.2. $f(1) = 1$:



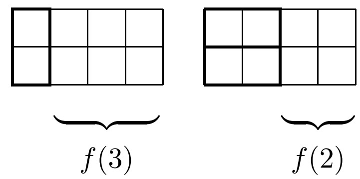
$f(2) = 2$:



$f(3) = 3$:



$f(4) = 5 = f(3) + f(2)$:

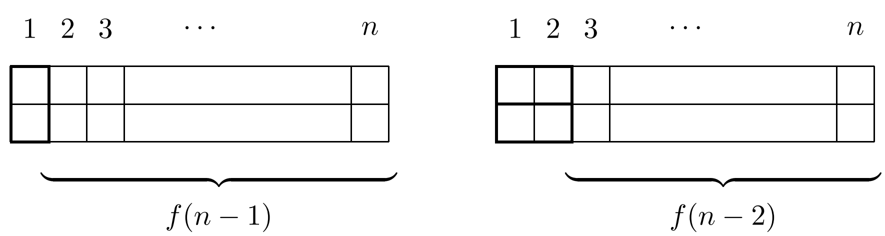


Analogamente, $f(5) = 8 = f(4) + f(3)$. Isto leva-nos a conjecturar que

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (n \geq 3).$$

Esta conjectura pode ser provada, por exemplo, do seguinte modo:

Para construir uma cobertura perfeita de um tabuleiro $2 \times n$ podemos colocar uma peça na vertical, a ocupar a coluna 1, e teremos depois $f(n-1)$ maneiras diferentes de cobrir o resto do tabuleiro, ou podemos colocar duas peças na horizontal, a ocupar as colunas 1 e 2, e cobrir depois o resto do tabuleiro, o que pode ser feito de $f(n-2)$ modos distintos:



Com esta relação podemos agora concluir que $f(12)$ é igual a

$$f(11) + f(10) = 2f(10) + f(9) = 3f(9) + f(8) = \cdots = 21f(5) + 13f(4) = 233.$$

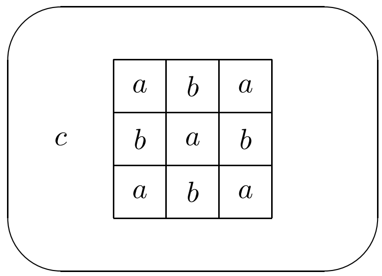
Quando estudarmos as relações de recorrência obteremos um método que nos permite realizar este cálculo de modo mais directo.

1.3. 11.

1.4. (a) Basta observar que as regiões do plano definido pelo mapa podem ser particionadas em duas classes: aquelas contidas num número par de círculos (pintemo-las de verde) e aquelas contidas num número ímpar de círculos (pintemo-las de preto). É óbvio que regiões vizinhas terão cores diferentes.

(b) Cada linha recta divide o plano em duas metades. Juntemos a cada linha um vector a ela perpendicular, totalmente contido numa dessas duas metades. A metade do plano contendo o vector designamo-la por *interior*. Podemos agora repetir o argumento da alínea anterior, palavra por palavra, substituindo círculos por metades interiores.

1.5. Denotando as três cores por a, b, c, basta fazer, por exemplo:



É evidente que com duas cores tal é impossível pois, necessariamente,

$$\begin{aligned} \text{Cor}(10) &\neq \text{Cor}(1) \\ \text{Cor}(10) &\neq \text{Cor}(4) \\ \text{Cor}(4) &\neq \text{Cor}(1) \end{aligned}$$

Fixadas três cores, o número de colorações distintas com essas cores é 12 (temos 3 hipóteses para a cor da região 10; fixada esta cor, temos como hipótese para a região 1 as duas cores restantes; fixada esta cor, todas as outras ficam automaticamente fixadas excepto a da região 5, que pode ser pintada com duas possíveis cores; ao todo, são $3 \times 2 \times 2 = 12$ hipóteses diferentes).

1.6. Por análise exaustiva dos diversos casos, podemos concluir facilmente que há duas soluções, de comprimento mínimo 13: $a\,c\,b\,d\,e\,z$ e $a\,c\,e\,z$. Claro que esta análise exaustiva deixa de ser viável em mapas mais complexos. Para isso a Teoria dos Grafos desenvolveu algoritmos que permitem determinar a solução de modo eficiente. Por manifesta falta de tempo, não os estudaremos.

Capítulo 2

2.1. $22 \times 99 + 1 = 2179$.

2.2. 18.

2.3. Comecemos por separar as pessoas segundo a sua nacionalidade. É evidente que há, pelo menos, um grupo com um mínimo de 41 pessoas, pois não é possível terem todos no máximo 40. Nesse grupo, pelo menos 21 têm o mesmo sexo. Temos então um grupo de pelo menos 21 pessoas do mesmo país e sexo. Separemos agora as pessoas deste grupo segundo as suas idades. Formamos assim um máximo de 5 grupos já que se tivessemos 6 grupos haveria 6 pessoas com idades diferentes, o que não é possível. É agora claro que pelo menos um destes 5 grupos tem, no mínimo, 5 pessoas.

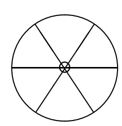
2.5. Os vértices do quadrilátero particionam a circunferência em quatro arcos, cujos comprimentos somam 2π, pelo que o menor desses arcos tem comprimento menor ou igual a $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. O segmento correspondente (ligando os extremos deste arco) tem, pelo Teorema de Pitágoras, comprimento inferior ou igual a $\sqrt{2}$.

2.8. Fazendo a distribuição dos 45 alunos pelos 8 instrumentos, se só existissem 2 instrumentos executados por pelo menos 5 alunos, como não há mais de 10 a executarem o mesmo instrumento, só conseguiríamos distribuir

$$10 + 10 + 6 \times 4 = 44$$

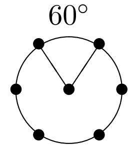
alunos.

2.9. Dividamos o disco em 6 partes iguais como se mostra na figura.



Se colocarmos 7 pontos no disco então necessariamente dois deles ficarão no mesmo gomo. Como a distância entre eles não é inferior a 1, um deles terá que estar no centro do disco. Teremos assim um ponto no centro do disco e os outros seis distribuídos pelos seis gomos, um em cada, e situados sobre a circunferência do disco. Nestes seis pontos, cada par de pontos adjacentes deverá definir um ângulo ao centro de $60°$ ou mais. Mas estes 6 ângulos deverão somar $360°$ pelo que cada um deles mede exactamente $60°$.

60°



2.10. Os valores possíveis para a soma dos algarismos estão entre 1 e 27. Temos a seguinte distribuição para a quantidade de cartões cuja soma dos algarismos é igual a cada valor possível:

soma	1	2	3	4	$\cdots\cdots$	24	25	26	27
número de cartões	1	3	≥ 3	≥ 3	$\cdots\cdots$	≥ 3	≥ 3	3	1

Para termos a certeza de tirar pelo menos três cartões cuja soma é idêntica, necessitamos de fazer a contagem supondo o pior caso possível: obter um cartão com cada um dos 27 valores possíveis, depois um cartão com cada um dos 25 valores possíveis restantes e, finalmente, mais um cartão; ou seja, $k = 27 + 25 + 1 = 53$.

2.11. Denotemos os inteiros por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e consideremos as caixas

$$\begin{array}{cccccc} \sqcup & \sqcup & \sqcup & \cdots & \sqcup & \sqcup \\ 0 & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{array}$$

correspondentes aos restos possíveis na divisão por n. Coloquemos cada um dos n subconjuntos $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ na caixa correspondente ao resto da divisão por n da soma dos elementos do subconjunto. Se algum deles ficar na caixa 0 então a soma dos elementos do subconjunto é divisível por n. Caso contrário, os subconjuntos estarão nas $n-1$ caixas restantes. Então, pelo Princípio dos Pombais, dois deles, digamos $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ e $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, onde $r < s$, estarão na mesma caixa. Como $a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ e $a_1 + a_2 + \cdots + a_s$ terão o mesmo resto na divisão por n, decorre que a diferença $a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_s$ é divisível por n.

2.12. Seja $X = \{1, 2, \ldots, 3000\}$. Tentemos construir um subconjunto A de X de acordo com o enunciado. Como o dobro de qualquer número no intervalo $P = [1501, 3000]$ não pertence a X poderíamos pôr qualquer um destes 1500 inteiros em A sem nenhum problema. Evidentemente que depois teríamos que ser cuidadosos na escolha dos elementos de $Q = [751, 1500]$ a colocar em A: não poderíamos colocar nenhum que fosse metade de um entretanto já escolhido de P. É claro que se escolhessemos k inteiros de Q não poderíamos escolher mais do que $1500 - k$ inteiros de P e, portanto, no total não poderíamos escolher mais do que 1500 inteiros do intervalo $P \cup Q = [751, 3000]$. Portanto, de modo a construirmos o conjunto A, pelo menos 500 dos seus elementos deverão pertencer ao intervalo $[1, 750]$:

$$1,2,\dots,750,\underbrace{\overbrace{751,\dots,1500}^{Q},\underbrace{\overbrace{1501,\dots,3000}^{P}}_{\leq 1500}}_{\leq 1500}$$

Se repetirmos este raciocínio sucessivamente chegaremos à conclusão que teremos necessariamente de escolher

- pelo menos 125 elementos do intervalo $[1, 187]$:

$$1,2,\dots,187,\underbrace{188,\dots,375,\underbrace{376,\dots,750}_{\leq 375}}_{\leq 375}$$

- pelo menos 31 elementos do intervalo $[1, 46]$:

$$1,2,\dots,46,\underbrace{47,\dots,93,\underbrace{94,\dots,187}_{\leq 94}}_{\leq 94}$$

- pelo menos 8 elementos do intervalo $[1, 11]$:

$$1,2,\dots,11,\underbrace{12,\dots,23,\underbrace{24,\dots,46}_{\leq 23}}_{\leq 23}$$

- pelo menos 2 elementos do intervalo $[1, 2]$:

$$1,2,\underbrace{3,4,5,\underbrace{6,\dots,11}_{\leq 6}}_{\leq 6}$$

Esta última afirmação mostra que é impossível existir tal subconjunto A de X.

A resolução diz-nos ainda que, se se exigir que A tenha somente 1999 elementos, já a resposta é afirmativa pois $1500 + 375 + 94 + 23 + 6 + 1 = 1999$.

2.13. Denotemos por $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \geq 2)$ as n pessoas e por $a(p_i)$ o número de amigos, dentro do grupo, de p_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. É claro que $a(p_i) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Se $a(p_i) \neq 0$ para todo o i, então é óbvio, pelo Princípio dos Pombais, que existem duas pessoas p_j e p_k tais que $a(p_j) = a(p_k)$. Por outro lado, se $a(p_i) = 0$ para algum i então $a(p_j) \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ para qualquer j pelo que, novamente pelo Princípio dos Pombais, $a(p_j) = a(p_k)$ para algum par de pessoas p_j e p_k.

Capítulo 3

3.2. Nos quadros seguintes, são indicados, na segunda coluna, os algarismos dos números de três algarismos que têm o algarismo da primeira coluna do quadro como média dos outros dois. O número total de números construídos com esses algarismos é indicado na terceira coluna.

Algarismo médio	Algarismos	Total de números
1	1 0 2	4
	1 1 1	1
2	2 0 4	4
	2 1 3	6
	2 2 2	1
3	3 0 6	4
	3 1 5	6
	3 2 4	6
	3 3 3	1
4	4 0 8	4
	4 1 7	6
	4 2 6	6
	4 3 5	6
	4 4 4	1

Algarismo médio	Algarismos	Total de números
5	5 1 9	6
	5 2 8	6
	5 3 7	6
	5 4 6	6
	5 5 5	1
6	6 3 9	6
	6 4 8	6
	6 5 7	6
	6 6 6	1
7	7 5 9	6
	7 6 8	6
	7 7 7	1
8	8 7 9	6
	8 8 8	1
9	9 9 9	1

Existem assim, ao todo, 121 números equilibrados.

3.3. Representemos os números entre 4000 e 5000 na forma $4cdu$. Tal número será ascendente se $4 < c < d < u$. Como c, d e u são números inteiros inferiores a 10, temos as seguintes possibilidades:

c	5	5	5	5	5	5	6	6	6	7
d	6	6	6	7	7	8	7	7	8	8
u	7	8	9	8	9	9	8	9	9	9
$4cdu$	4567	4568	4569	4578	4579	4589	4678	4679	4689	4789

Logo existem 10 números ascendentes entre 4000 e 5000.

3.4. Um número
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$
com 7 algarismos é uma capicua se e só se $a_7 = a_1, a_6 = a_2$ e $a_5 = a_3$. Portanto uma capicua com 7 algarismos é da forma $a_1a_2a_3a_4a_3a_2a_1$ onde $a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Pretendemos contar aquelas em que a_1, a_2, a_3, a_4 são todos distintos (dois a dois). Na construção de uma capicua nestas condições existem 9 possibilidades diferentes para o algarismo a_1, 9 possibilidades diferentes para a_2, 8 possibilidades para a_3 e 7 possibilidades para a_4. Pelo Princípio da Multiplicação, existem então $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ capicuas de 7 algarismos com 4 algarismos distintos.

3.5. Uma vez que o alfabeto tem 23 letras, existem $23 \times 23 = 529$ códigos com a mesma letra na primeira posição. Como $4 \times 23 \times 23 = 2116$ mas $5 \times 23 \times 23 = 2645$, podemos concluir que o código DZZ cataloga o 2116º livro e portanto a primeira letra do código pretendido é a letra E. Restam 2203-2116=87 livros por catalogar. Como $3 \times 23 = 69$ mas $4 \times 23 = 92$, podemos concluir que a segunda letra é a letra D. Por fim, 87-69=18 e, consequentemente, a última letra do código é a letra S. Assim, a resposta é EDS.

3.6. Ao escrever os números de 1 a 9, e todos os números de dois algarismos começados por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, escrevemos o algarismo 7 por 9 vezes. Ao escrever os números de dois algarismos começados por 7, escrevemos mais 11 vezes o algarismo 7. Assim ao escrever os números de 1 a 99, vamos escrever 20 vezes o algarismo 7. O mesmo número de vezes utilizamos o algarismo 7 quando escrevemos os números de três algarismos começados por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Ao escrever os números de três algarismos começados por 7 escrevemos $20 + 100 = 120$ vezes o algarismo 7. Assim, ao escrever os números de 1 a 999, escrevemos $9 \times 20 + 120 = 300$ vezes o algarismo 7. O mesmo número de algarismos 7 temos que utilizar quando escrevemos os números de 1000 a 1999. Como em 1998 e 1999 não aparece o 7, no total, ao escrever os números de 1 a 1997, escrevemos 600 vezes o algarismo 7.

3.7. Comecemos por ver como varia o número de algarismos de n^2 em função de n.

Para $n = 1, 2, 3$, o número n^2 tem um algarismo, o que dá um total de 3 algarismos.

Para $n = 4, \ldots, 9$, o número n^2 tem dois algarismos, o que dá um total de 12 algarismos.

Para $n = 10, \ldots, 31$, o número n^2 tem três algarismos, o que dá um total de 66 algarismos.

Para $n = 32, \ldots, 35$, o número n^2 tem quatro algarismos, o que dá um total de 16 algarismos.

Assim, ao escrevermos os primeiros 35 quadrados temos um total de $3+12+66+16 = 97$ algarismos. Portanto, o centésimo algarismo será o terceiro algarismo de $36^2 = 1296$, ou seja, 9.

3.8. O número de números simples inferiores a um milhão pode obter-se somando o número de números simples com $1, 2, 3, 4, 5$ e 6 algarismos. Com um algarismo existem apenas dois números simples: o 1 e o 2. Como os números simples com um dado número de algarismos se obtêm acrescentando os algarismos 1 ou 2 aos números simples com um algarismo a menos, obtemos 4 números simples com dois algarismos, 8 números simples com três algarismos, 16 números simples com quatro algarismos, 32 números simples com cinco algarismos e, finalmente, 64 números simples com seis algarismos. O número de números simples inferiores a um milhão é então igual a $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$.

3.9. $C_3^{10} \times C_5^{10} + C_3^{10} \times C_1^{10} \times C_4^{10} + C_3^{10} \times C_2^{10} \times C_3^{10}$, que é igual a $120 \times 252 + 120 \times 10 \times 210 + 120 \times 45 \times 120 = 930240$.

3.11. Como cada número *abcde* é igual a $a \times 10\,000 + b \times 1\,000 + c \times 100 + d \times 10 + e$, basta calcular a soma de todos os algarismos das unidades. O número de parcelas com $e = 1$ é $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, correspondentes às possibilidades de escolha para preencher cada um dos outros algarismos do número. Esta contagem repete-se para cada uma das outras escolhas possíveis para o valor de e. Assim, a soma dos algarismos das unidades de todos os números vale $1 \times 24 + 3 \times 24 + 5 \times 24 + 7 \times 24 + 9 \times 24 = 25 \times 24 = 600$. Se efectuarmos agora a soma das dezenas, os argumentos utilizados repetem-se, obtendo-se como soma $1 \times 10 \times 24 + 3 \times 10 \times 24 + 5 \times 10 \times 24 + 7 \times 10 \times 24 + 9 \times 10 \times 24 = 600 \times 10 = 6\,000$. Repetindo agora o processo descrito atrás obtemos para a soma pedida o valor $600 + 600 \times 10 + 600 \times 100 + 600 \times 1\,000 + 600 \times 10\,000 = 6\,666\,600$.

3.12. Designemos pelas letras a, b, c, d, c os cinco bandidos de modo que as respectivas alturas satisfaçam $alt(a) < alt(b) < alt(c < alt(d) < alt(e)$. O objectivo do inspector Loureiro é, portanto, prender o bandido a. A probabilidade de ele realizar tal evento é igual ao quociente do número de permutações *favoráveis* do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ (isto é, as permutações $x_1x_2x_3x_4x_5$ tais que o elemento de $\{x_3, x_4, x_5\}$ com menor índice que seja mais baixo do que x_1 e x_2 seja exactamente o bandido a) pelo número de permutações total (que é igual a $5! = 120$). Determinemos então o número de permutações favoráveis:

Claro que nenhuma permutação na qual a aparece na 1^a ou 2^a posições é favorável. Aquelas em que a aparece na 3^a posição são todas favoráveis e são em número de $4! = 24$. Contemos agora as permutações favoráveis nas quais a aparece na 4^a posição: as 6 nas quais b está na 1^a posição são favoráveis; analogamente as 6 nas quais b está na 2^a posição são também favoráveis; nenhuma das que b aparece na 3^a posição é favorável; das que b aparece na 5^a posição somente 4 são favoráveis ($cdcab$, $dceab$, $ccdab$, $ecdab$). Portanto ao todo temos 16 permutações favoráveis nas quais a esta na 4^a posição.
Finalmente contemos as permutações favoráveis nas quais a aparece na 5^a posição: obviamente são aquelas em que b aparece na 1^a ou 2^a posições; portanto, são $3 \times 2 + 3 \times 2 = 12$ permutações.
Em conclusão, o número de permutações favoráveis é igual a $24 + 16 + 12 = 52$ e, consequentemente, a probabilidade do inspector Loureiro apanhar o chefe do bando é igual a

$$\frac{52}{120} = 0,43(3).$$

3.13. Como o número de diagonais de qualquer polígono com n lados é igual a $C_2^n - n$, então a hipótese do problema diz-nos que $C_2^{m-1} + C_2^{n-1} = 165$. Logo, o número pedido é, pela Fórmula de Pascal, igual a

$$\begin{aligned} C_2^m - m + C_2^n - n &= C_2^{m-1} + C_1 m - 1 + C_2^{n-1} + C_1^{n-1} - m - n \\ &= 165 + m - 1 + n - 1 - m - n \\ &= 163. \end{aligned}$$

3.14. Seja $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ uma sequência nas condições do problema.

No caso de <u>n ser par</u> então

$$\begin{aligned} &u_n, u_{n-1} \in \{\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{2}+1, \ldots, n\} \\ &u_{n-2}, u_{n-3} \in \{\tfrac{n}{2}-1, \tfrac{n}{2}, \ldots, n\} \\ &\ldots \\ &u_4, u_3 \in \{2, 3, \ldots, n\} \\ &u_2, u_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Ao construirmos uma destas sequências, como os algarismos têm de ser todos distintos, temos $n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1$ hipóteses de escolha para u_n, $n - \frac{n}{2} + 1 - 1 = \frac{n}{2}$ hipóteses de escolha para u_{n-1}, $n - (\frac{n}{2} - 1) + 1 - 2 = \frac{n}{2}$ hipóteses de escolha para u_{n-2}, $n - (\frac{n}{2} - 1) + 1 - 3 = \frac{n}{2} - 1$ hipóteses de escolha para u_{n-3}, e assim sucessivamente, até $n - 2 + 1 - (n-3) = 2$ hipóteses de escolha para u_3, $n - (n-2) = 2$ hipóteses de escolha para u_2 e $n - (n-1) = 1$ hipótese de escolha para u_1.

Concluindo, existem

$$(\frac{n}{2}+1)\times\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}\times\cdots\times 2\times 2\times 1=(\frac{n}{2}+1)\times[(\frac{n}{2})!]^2$$

sequências nas condições requeridas.

No caso de <u>n ser ímpar</u> temos

$$\begin{array}{l} u_n \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1,\ldots,n\} \\ u_{n-1}, u_{n-2} \in \{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}+1,\ldots,n\} \\ \ldots \\ u_4, u_3 \in \{2,3,\ldots,n\} \\ u_2, u_1 \in \{1,2,\ldots,n\}. \end{array}$$

Raciocinando como no caso anterior podemos concluir que neste caso existem

$$\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2}\times(\frac{n+1}{2}-1)\times(\frac{n+1}{2}-1)\cdots\times 2\times 2\times 1=[(\frac{n+1}{2})!]^2$$

sequências nas condições requeridas.

3.19. (a) Para $n=1$ é óbvio: $\binom{4}{4}=1=\binom{5}{5}$. Suponhamos agora que, para um dado $t\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{t}\binom{k+3}{4}=\binom{t+4}{5}$. Nestas condições,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t+1}\binom{k+3}{4} &= \Big(\sum_{k=1}^{t}\binom{k+3}{4}\Big)+\binom{t+4}{4} \\ &= \binom{t+4}{5}+\binom{t+4}{4} && \text{(Hipótese de indução)} \\ &= \binom{t+5}{5} && \text{(Fórmula de Pascal).} \end{aligned}$$

3.21. Comecemos por observar qual é a resposta em alguns casos particulares:

n	3^n+1	k
1	4	2
2	10	1
3	28	2
4	82	1
5	244	2
6	730	1

Isto leva-nos a conjecturar que a resposta deverá ser $k=1$ no caso em que n é par e $k=2$ no caso em que n é ímpar. Demonstremo-la:

Solução 1: Temos

$$\begin{aligned}3^n+1=(2+1)^n+1 &= \Big(1+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^2+\cdots+\binom{n}{n-1}2^{n-1}+2^n\Big)+1\\ &= 2\Big(\underbrace{1+\binom{n}{1}}_{1+n}+\underbrace{\binom{n}{2}2+\cdots+\binom{n}{n-1}2^{n-2}+2^{n-1}}_{\text{par}}\Big).\end{aligned}$$

Portanto, se n for par, $1+n$ é ímpar e 3^n+1 é o dobro de um número ímpar pelo que $k=1$.

No caso em que n é ímpar então n é par, digamos $2m$, pelo que teremos

$$\begin{aligned}3^n+1 &= 2\Big(2m+\binom{n}{2}2+\binom{n}{3}2^2+\cdots+\binom{n}{n-1}2^{n-2}+2^{n-1}\Big)\\ &= 4\Big(m+\binom{n}{2}+\underbrace{\binom{n}{3}2+\cdots+\binom{n}{n-1}2^{n-3}+2^{n-2}}_{\text{par}}\Big).\end{aligned}$$

Mas

$$m+\binom{n}{2}=m+\binom{2m-1}{2})=\frac{2m+(2m-1)(2m-2)}{2}=2m^2-2m+1$$

é ímpar pelo que 3^n+1 é o quádruplo de um número ímpar, ou seja, $k=2$.

Solução 2: A conjectura acima provada pode ser alternativamente confirmada por indução sobre n. Comecemos por demonstrar que, sendo n par, 3^n+1 é sempre o dobro de um número ímpar. O caso $n=2$ é óbvio pois $3^n+1=10=2\times 5$. Supondo a afirmação válida para um dado n par, provemo-la para $n+2$. Bastará para isso observar que

$$3^{n+2}+1=(3^n+1-1)\times 3^2+1=(2m-1)\times 9+1=18m-8=2\times(9m-4),$$

onde m designa o número ímpar tal que $3^n+1=2m$ e, portanto, $9m-4$ é também ímpar.

Finalmente provemos que, sendo n ímpar, 3^n+1 é sempre o quádruplo de um número ímpar. O caso $n=1$ é óbvio pois $3^n+1=4$. Supondo a afirmação válida para um dado n ímpar, provemo-la para $n+2$:

$$3^{n+2}+1=(3^n+1-1)\times 3^2+1=(4m-1)\times 9+1=36m-8=4\times(9m-2),$$

onde m designa o número ímpar tal que $3^n+1=4m$. Portanto, $9m-2$ é também ímpar e $3^{n+2}+1$ é o quádruplo de um número ímpar.

Capítulo 4

4.1. Uma vez que existem 100 raparigas sócias do Clube Pitágoras, 80 sócias do Clube Euclides e 60 de ambos, podemos afirmar que existem $100+80-60=120$ raparigas sócias no total dos dois clubes. Então existem $230-120=110$ rapazes sócios no total dos dois clubes. Consequentemente, $80+100-110=70$ rapazes são sócios de ambos os clubes, pelo que $80-70=10$ rapazes são sócios do Clube Pitágoras mas não o são do Clube Euclides.

4.6. Evidentemente, se $m<n$ não existe nenhuma. Suponhamos então que $m \geq n$.

Toda a informação necessária para identificar uma função $f: A \to B$ pode ser dada na forma de um arranjo com repetição dos n elementos de B, m a m. Aqueles que dão as funções sobrejectivas são precisamente aqueles nas quais cada elemento b_i de B aparece, pelo menos, uma vez. Seja então X o conjunto de todos os arranjos com repetição dos elementos de B, m a m. Diremos que um elemento de X possui a propriedade P_i ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$) caso b_i não pertença a esse arranjo. Seja ainda A_i o conjunto dos elementos de X que satisfazem P_i.

Como $|X|=n^m$, $|A_i|=(n-1)^m$, $|A_i \cap A_j|=(n-2)^m, \ldots, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|=(n-k)^m$, então pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, o número de funções sobrejectivas de A em B é igual a

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = n^m - C_1^n(n-1)^m + C_2^n(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^n 1^m.$$

Em particular, o número de maneiras diferentes de entregar 5 tarefas diferentes, a quatro empregados, entregando a cada um deles uma tarefa, pelo menos, é igual a

$$4^5 - C_1^4 3^5 + C_2^4 2^5 - C_3^4 1^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240.$$

4.7. Sendo X o conjunto das permutações de $\{1,2,\ldots,2n\}$ e P_i a propriedade "i e $i+n$ aparecem em posições consecutivas" pretendemos provar que o número de elementos de X que possuem pelo menos uma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é maior que

$$\frac{|X|}{2} = \frac{(2n)!}{2}.$$

Pelo Corolário 4.2 esse número M é igual a

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Mas

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \geq 0$$

logo

$$M \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j|.$$

Como $|A_i| = 2(2n-1)(2n-2)!$ e $|A_i \cap A_j| < 2(2n-1)2(2n-3)(2n-4)!$ então

$$\begin{aligned} M &> 2(2n-1)(2n-2)!n - C_2^n 2(2n-1)2(2n-3)(2n-4)! \\ &= (2n)! - 2n(n-1)(2n-1)(2n-3)! \\ &= 2n(2n-1)(2n-3)!(n-1). \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{M}{(2n)!} > \frac{1}{2},$$

isto é,

$$M > \frac{(2n)!}{2}.$$

Capítulo 5

5.1. Seja n o número de partidos concorrentes às eleições. Se denotarmos por

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$$

o conjunto das 7 promessas feitas, o problema resume-se a determinar o maior valor de n para o qual existe uma colecção $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de subconjuntos de $\mathcal{P}$, não-vazios (regra (a)), distintos dois a dois (regra (b)) tais que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ sempre que $i \neq j$ (regra (c). Como $\mathcal{P}$ possui 2^7 subconjuntos distintos e como um conjunto e o seu complementar não podem estar ambos nessa colecção (atendendo à regra (c)), necessariamente

$$n \leq \frac{2^7}{2} = 2^6 = 64.$$

Mas é possível formar uma tal colecção com 64 subconjuntos; bastará, por exemplo, formar cada S_i $(i = 1, \ldots, n)$ com o elemento p_1 e com um subconjunto de $\{p_2, \ldots, p_7\}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{p_1\} \\ S_2 &= \{p_1, p_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \{p_1, p_3\} \\
&\vdots \\
S_7 &= \{p_1, p_7\} \\
S_8 &= \{p_1, p_2, p_3\} \\
S_9 &= \{p_1, p_2, p_4\} \\
&\vdots \\
S_{12} &= \{p_1, p_2, p_7\} \\
S_{13} &= \{p_1, p_3, p_4\} \\
S_{14} &= \{p_1, p_3, p_5\} \\
&\vdots \\
S_{16} &= \{p_1, p_3, p_7\} \\
&\vdots \\
S_n &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}
\end{aligned}$$

Como o número de subconjuntos de $\{p_2, \ldots, p_7\}$ é igual a $2^6 = 64$, teremos no máximo $n = 64$.

5.6. (a) $\overline{A}_6^5(1,1,1,1,2) = \frac{6!}{2!} = 720$.

(b) $4! = 24$.

(c) $\overline{A}_4^3(2,1,1) = \frac{4!}{2!} = 12$.

(d) 72.

Capítulo 6

6.1. Cf. ([9], p. 170).

6.3. (a) Existem $\overline{A}_4^6 = 6^4 = 1296$ funções de A para B; dessas, $A_4^6 = 360$ são injectivas e nenhuma é sobrejectiva.

(b) Existem $\overline{A}_6^4 = 4^6 = 4096$ funções de B para A; dessas, $T_4^6 = S_4^6 \times 4! = 65 \times 4! = 1560$ são sobrejectivas e nenhuma é injectiva.

6.6. (a) $PO_3^5 = 3^5$.

(b) $P_3^5 = S_1^5 + S_2^5 + S_3^5 = 1 + 15 + 25 = 41$.

6.7. (a) $PO_4^{12}(5,3,1,3) = \frac{12!}{5!3!3!} = 110880$.

(b) $PO_4^{12}(3,3,3,3) = \frac{12!}{3!3!3!3!} = 369600$.

(c) $C_2^4 \times PO_4^{12}(6,6) = 5544$.

6.8. O número de casos possíveis é igual a $PO_r^n = r^n$. Como o número de casos favoráveis é igual a $C_s^n \times T_{r-s}^n$ (C_s^n corresponde às diferentes possibilidades para o conjunto das s caixas vazias e T_{r-s}^n corresponde, pelo Teorema 6.6, ao número de partições ordenadas de um conjunto com n elementos em $r-s$ subconjuntos não vazios) a probabilidade requerida é igual a

$$\frac{C_s^n \times T_{r-s}^n}{r^n}.$$

Capítulo 7

7.2. (a) Uma função estritamente crescente de $[n]$ para $[m]$ fica univocamente determinada pela sua imagem, isto é, pelos n valores que toma em $[m]$. Portanto, uma função estritamente crescente de $[n]$ para $[m]$ fica univocamente determinada por um subconjunto de $[m]$ com n elementos. Existem pois C_n^m funções estritamente crescentes de $[n]$ para $[m]$.

(b) Uma função crescente, em sentido lato, de $[n]$ para $[m]$ não fica determinada meramente pela sua imagem, já que a função não tem que ser injectiva. No entanto é simples observar que fica determinada pela quantidade de elementos de $[n]$ que pode atingir cada elemento de $[m]$. O problema consiste assim em contar o número de maneiras de distribuir n bolas por m caixas, em que apenas interessa o número de bolas por caixa. Este problema foi resolvido na entrada número quatro da tabela dos doze caminhos: C_n^{n+m-1}.

Capítulo 8

8.1. $c^2 = \frac{1377}{2401} \times \frac{49}{153} \Leftrightarrow c = \pm\frac{3}{7}$.

8.3. (a) $t(n) = 2t(n-1) + 2t(n-2)$.

8.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big],$$

pois $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_2 = 2$ e $a_1 = 1$.

8.6. (a) $s_1 = 21$, $s_2 = 44 + 21 \times 21 = 485$, $s_3 = 44 + 21 \times 44 + 21 \times 485$.

(b) $s_n = 21s_{n-1} + 44(s_{n-2} + \cdots + s_0)$ $(n \geq 2)$, onde $s_0 = 1$.

(c) Trata-se de uma relação de recorrência linear homogénea com coeficientes constantes de ordem n que pode ser facilmente transformada numa de ordem 2:

De $s_n = 21s_{n-1} + 44(s_{n-2} + \cdots + s_0)$ (para $n \geq 2$) e $s_{n-1} = 21s_{n-2} + 44(s_{n-3} + \cdots + s_0)$ (para $n \geq 3$) segue $s_n - s_{n-1} = 21s_{n-1} + 23s_{n-2}$ (para $n \geq 3$). Portanto $s_n = 22s_{n-1} + 23s_{n-2}$ ($n \geq 3$). A equação característica $x^2 - 22x - 23 = 0$ tem raízes 1 e 23. Logo $s_n = c_1 + c_2 23^n$. As condições iniciais $s_1 = 21$ e $s_2 = 485$ implicam $c_1 = -1/11$ e $c_2 = 232/253$. Em conclusão,

$$s_n = -\frac{1}{11} + \frac{232}{11}23^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Capítulo 9

9.1. $f(x) = (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+\cdots)$

9.3. (a) $\binom{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1/3(-2/3)(-5/3)}{3!} = \frac{10}{3^3 \times 6} = \frac{5}{81}$.

(b) $\binom{-2}{3} = -4$.

(c) $(-1)^3\binom{-5}{3} = 35$.

(d) $4^3\binom{\frac{1}{2}}{3} = 4$.

9.5. $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$.

9.6. Partamos da sugestão $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$. Pelo Teorema Binomial isto é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^r + x\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^r \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^r + \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^{r+1} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^r + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}x^r \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{n-1}{r}x^r + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}x^r \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{r=1}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\right)x^r \\
\Leftrightarrow\ & \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.
\end{aligned}$$

9.9. (b) $u_n = 4^n$.

9.10. Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Depois de reordenar algumas parcelas do somatório e adicionar as séries, observamos que

$$\begin{aligned} g(x) - xg(x) - x^2 g(x) &= f_0 + (f_1 - f_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n \\ &= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 0x^n. \end{aligned}$$

Portanto $g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = x$, donde

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Pelo método das fracções parciais podemos concluir que

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\Big)$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$, decorre daqui que

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n - \beta^n) x^n.$$

Logo

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Referências bibliográficas

[1] C. André e F. Ferreira, *Matemática Finita*, Universidade Aberta, 2000. (05A/AND)

[2] N. L. Biggs, E. K. Lloyd e R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, 1986. (05-01/BIG)

[3] R. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, North-Holland, 1977. (05-01/BRU)

[4] K. L. Chung, *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer, 1974. (60-01/CHU.Con)

[5] A. Kaufmann, *Introduction à la Combinatorique en Vue des Applications*, Dunod, 1968. (05-01/KAU.Int)

[6] E. Lages Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. César Morgado, *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 2, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. (00A05/Mat,2)

[7] G. E. Martin, *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics*, Springer, 2001.

[8] I. Niven, *Mathematics of Choice: How to count without counting*, Mathematical Association of America, 1965. (05-01 NIV.Mat)

[9] J. Picado, *Matemática Discreta*, em: Actas do IX Encontro Regional da SPM (Tomar, 1986), pgs. 153-194. (00B25/SOC.Enc,9)

[10] F. Roberts, *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall, 1984. (05-01/ROB)

[11] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, McGraw-Hill, 1995. (03A/ROS)

[12] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Mathematical Association of America, 1963. (05B/RYS)

[13] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1972. (05-01/WIL)