Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 40m **Teste 1** 26/02/08

NOME DO ALUNO: ______________________________

(Justifique convenientemente as suas respostas.)

- Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_6, \oplus_6, \otimes_6)$.

  (1) Determine, em A, os elementos -2 e 5^{-1}.

  (2) A tem divisores de zero? Em caso afirmativo, liste-os.

  (3) Para que elementos $a \in A$ é válida a *lei do corte*

$$\forall\, b, c \in A\ (ab = ac \Rightarrow b = c)\,?$$

- Seja $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ o anel das funções $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:

$$\forall\, f, g \in \mathcal{F}\ \ \forall\, x \in \mathbb{Z}_6 \quad (f+g)(x) = f(x) \oplus_6 g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \otimes_6 g(x).$$

  (4) Qual é a identidade deste anel? E os divisores de zero?

  (5) Calcule o inverso (para a multiplicação) do elemento $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ definido por $f(n) = 1$ para $n \leq 1$ e $f(n) = 5$ para $n > 1$.

  (6) Quais são os elementos invertíveis de $\mathcal{F}$?

- Para cada par $(a, b) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ considere o conjunto $\mathcal{F}_{(a,b)} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = b\}$.

  (7) Para que valores de a e b é que $\mathcal{F}_{(a,b)}$ é um subanel de $\mathcal{F}$?

  (8) Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{Z}_6$, $\mathcal{F}_{(a,0)}$ é um ideal de $\mathcal{F}$. É primo?

  (9) O anel quociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{(a,0)}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_6$?