Soluções de exercícios seleccionados

Capítulo 1

1.9. *Seja D um domínio de integridade. Mostre que:*

(a) Para cada $d \in D - \{0\}$, a aplicação $\phi_d : D \to D$, definida por $\phi_d(x) = dx$, é injectiva.

(b) Se D é finito, então D é um corpo.

(a) Se $d \in D - \{0\}$, então para quaisquer $x, y \in D$,

$$dx = dy \Leftrightarrow dx - dy = 0 \Leftrightarrow d(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

o que mostra que ϕ_d é injectiva.

(b) Se D é finito então, para cada $d \in D - \{0\}$, sendo injectiva, ϕ_d é imediatamente bijectiva. Portanto, existe $c \in D$ tal que $\phi_d(c) = 1$, isto é, $dc = 1$. Isto significa que qualquer $d \in D - \{0\}$ é invertível, e D é um corpo.

1.24. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Considere o conjunto*

$$\mathcal{N}(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}.$$

(a) Calcule $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{32})$.

(b) Mostre que:

(i) $\mathcal{N}(A)$ é um ideal de A.

(ii) Para qualquer ideal primo I de A, $\mathcal{N}(A) \subseteq I$.

(iii) $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{\mathcal{N}(A)\}$.

(a) $\mathcal{N}(\mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\} = \{0\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbb{Z}_{32}) &= \{a \in \mathbb{Z}_{32} \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z}_{32} \mid \exists n \in \mathbb{N}, 32 \text{ divide } a^n\}. \end{aligned}$$

Ora

$$32|a^n \Rightarrow a^n \text{ é par } \Rightarrow a \text{ é par } \Rightarrow a \text{ é par.}$$

Reciprocamente,

$$a \text{ é par } \Rightarrow 2|a \Rightarrow 2^5|a^5 \Rightarrow 32|a^5.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{32}) &= \{a \in \mathbb{Z}_{32} \mid a \text{ é par }\} \\ &= \{0, 2, 4, 6, \ldots, 30\}.\end{aligned}$$

(b)(i) $0^1 = 0$ pelo que $0 \in \mathcal{N}(A)$.

Sejam $a \in \mathcal{N}(A)$ e $x \in A$. Então $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $(ax)^n = a^n x^n = 0$, o que mostra que $ax \in \mathcal{N}(A)$.

Finalmente, sejam $a, b \in \mathcal{N}(A)$. Então $a^n = 0 = b^m$ para alguns naturais n e m. Pretendemos provar que $a - b \in \mathcal{N}(A)$. O caso $a = 0$ ou $b = 0$ é óbvio. Suponhamos então $a, b \neq 0$ (donde $n, m > 1$). Pela fórmula do binómio de Newton (que provámos ser verdadeira num anel comutativo qualquer),

$$\begin{aligned}(a-b)^{nm} &= \sum_{k=0}^{nm} \binom{nm}{k} a^k (-b)^{nm-k} \\ &= a^0 b^{nm} + \binom{nm}{1} a b^{nm-1} + \binom{nm}{2} a^2 b^{nm-2} + \ldots + \binom{nm}{n-1} a^{n-1} b^{nm-n+1} + \\ &\quad + \binom{nm}{n} a^n b^{nm-n} + \ldots + \binom{nm}{nm-1} a^{nm-1} b + a^{nm} b^0.\end{aligned}$$

Neste último somatório, as parcelas da linha de cima são todas nulas porque o expoente em b é sempre $\geq m$ (note que $nm - n + 1 = n(m-1) + 1$ é $\geq m$ pois $n(m-1) \geq m - 1$ uma vez que $m - 1 > 0$ e $n > 1$); na linha de baixo são também todas nulas porque o expoente em a é sempre $\geq n$.

Portanto, $(a-b)^{nm} = 0$, o que mostra que $a - b \in \mathcal{N}(A)$.

(ii) Seja I um ideal primo de A. Para cada $a \in \mathcal{N}(A)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0 \in I$. Como I é primo, então $a \in I$.

(iii) $A/\mathcal{N}(A) = \{a + \mathcal{N}(A) \mid a \in A\}$ pelo que

$$\begin{aligned}a + \mathcal{N}(A) \in \mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (a + \mathcal{N}(A))^n = \mathcal{N}(A) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a^n + \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathcal{N}(A) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : (a^n)^m = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : a^{nm} = 0 \\ &\Leftrightarrow a \in \mathcal{N}(A) \\ &\Leftrightarrow a + \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A).\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{\mathcal{N}(A)\}$.

1.25. *Prove que se A é um anel, I e J são ideais de A e P é um ideal primo de A, então*

$$IJ \subseteq P \;\Rightarrow\; I \subseteq P \text{ ou } J \subseteq P.$$

Suponhamos que $IJ \subseteq P$ e $I \nsubseteq P$. Então existe $a \in I$ tal que $a \notin P$. Mas, para qualquer $b \in J$, $ab \in IJ \subseteq P$, o que implica, pela primalidade de P, que $a \in P$ ou $b \in P$. Como $a \notin P$, teremos que ter forçosamente b em P, o que mostra que $J \subseteq P$.

1.32. *Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = 2ab$.*

(a) Mostre que A é um anel comutativo com identidade.

(b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo (e justificando que se trata de facto de um isomorfismo).

(a) Uma vez que $+$ é a adição usual, o par $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo comutativo. Bastará então verificar que a operação $*$ é associativa, distributiva relativamente à adição e tem elemento neutro:

Associatividade: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$ temos $a * (b * c) = a * (2bc) = 2a2bc = 4abc$ enquanto $(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc$, pelo que se confirma a propriedade.

Distributividade: Como $*$ é comutativa basta verificar uma das condições de distributividade: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a * (b + c) = 2a(b + c) = 2ab + 2ac = (a * b) + (a * c)$.

Elemento neutro: $1/2$ é elemento neutro de $*$ pois, para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, $a*(1/2) = a$.

(b) Consideremos $S = \{a/2 : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$, que é claramente um subanel de A: é não vazio e, para quaisquer $x = a/2, y = b/2 \in S$, tem-se $x - y = (a/2) - (b/2) = (a - b)/2 \in S$ e $x * y = 2xy = 2(a/2)(b/2) = ab/2 \in S$.

Também não é difícil ver que $(S, +, *) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

Como, para cada $x \in S$, $2x \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função

$$\begin{array}{rccc} f: & (S, +, *) & \to & (\mathbb{Z}, +, \cdot) \\ & x & \mapsto & 2x. \end{array}$$

É um homomorfismo de anéis: para quaisquer $x, y \in S$ tem-se $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$ e $f(x * y) = f(2xy) = 4xy = 2x2y = f(x)f(y)$.

É injectiva: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$.

É sobrejectiva: para cada $a \in \mathbb{Z}$ seja $x = a/2 \in S$; evidentemente $f(x) = 2(a/2) = a$.

1.33. *Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = ab/3$.*

(a) Mostre que A é um corpo.

(b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo.

(a) Uma vez que $+$ é a adição usual, o par $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo comutativo. Bastará então verificar que a operação $*$ é distributiva relativamente à adição, associativa, comutativa e tem elemento neutro e que todo o elemento diferente do zero tem inverso relativamente a esta operação:

Distributividade: Como $*$ é comutativa basta verificar uma das condições de distributividade: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$,

$$a * (b + c) = \frac{a(b+c)}{3} = \frac{ab + ac}{3} = \frac{ab}{3} + \frac{ac}{3} = (a * b) + (a * c).$$

Associatividade: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a * (b * c) = a * \frac{bc}{3} = \frac{abc}{9}$ enquanto $(a * b) * c = \frac{ab}{3} * c = \frac{abc}{9}$, pelo que se confirma a propriedade.

Comutatividade: Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, $a * b = \frac{ab}{3} = \frac{ba}{3} = b * a$.

Elemento neutro: 3 é elemento neutro de $*$ pois, para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, $a * 3 = a$.

Existência de inversos: Para cada $a \neq 0$ em $\mathbb{Q}$, $\frac{9}{a}$ é o inverso de a pois $a * \frac{9}{a} = 3$.
(b) Consideremos $S = 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, que é claramente um subanel de A: é não vazio e, para quaisquer $x = 3a, y = 3b \in S$, tem-se $x - y = 3a - 3b = 3(a - b) \in S$ e

$$x * y = \frac{xy}{3} = \frac{3a3b}{3} = 3ab \in S.$$

Também não é difícil ver que $(S, +, *) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$: a função

$$\begin{array}{rccc} f: & (S, +, *) & \to & (\mathbb{Z}, +, \cdot) \\ & x & \mapsto & \frac{x}{3} \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis: para quaisquer $x, y \in S$ tem-se

$$f(x+y) = \frac{x+y}{3} = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(x*y) = f(\frac{xy}{3}) = \frac{xy}{9} = f(x)f(y).$$

Além disso, é injectiva, pois

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow x = y,$$

e é sobrejectiva, pois para cada $a \in \mathbb{Z}$, tomando $x = 3a \in S$, tem-se evidentemente $f(x) = \frac{3a}{3} = a$.

1.35. *Seja D um domínio de integridade e considere no conjunto $S = D \times (D \setminus \{0\})$ a relação*

$$(a, b) \sim (c, d) \equiv ad = bc.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em S.

(b) Denote a classe de equivalência $\{(c, d) \in S \mid (c, d) \sim (a, b)\}$ por a/b (ou $\frac{a}{b}$) e o conjunto de todas as classes de equivalência $\{a/b \mid (a, b) \in S\}$ por K. Prove que

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd \quad \text{e} \quad a/b \cdot c/d = ac/bd$$

definem operações em K que lhe dão uma estrutura de corpo (o chamado corpo das fracções *ou* quocientes *de D).*

(c) No caso $D = \mathbb{Z}$ que corpo é K ?

(d) Mostre que $D' = \{a/1 \mid a \in D\}$ é um subanel de K isomorfo a D e que para cada $x \in K$ existem $a, b \in D'$ com $b \neq 0$ tais que $x = ab^{-1}$.

(e) Seja D' um domínio de integridade contido num corpo L e

$$K' = \{a'(b')^{-1} \mid a', b' \in D', b' \neq 0\}.$$

Prove que K' é o menor subcorpo de L que contém D' e qualquer isomorfismo de D em D' tem uma extensão única a um isomorfismo de K em K'.

(f) Conclua que o corpo dos quocientes K de um domínio de integridade D é o menor corpo (a menos de isomorfismo) contendo D (no sentido de que não existe nenhum corpo L tal que $D \subset L \subset K$).

(a) As propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Suponhamos $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Então $ad = bc$ e $cf = de$. Isto implica $adf = bcf$ e $bcf = bde$ e portanto $adf = bde$. Cancelando d obtemos $af = be$, isto é, $(a, b) \sim (e, f)$. Assim, $\sim$ é transitiva.

(b) A operação + está bem definida: sejam $a/b, c/d, a'/b', c'/f' \in K$ e suponhamos $a/b = a'/b'$ e $c/d = c'/d'$. Então $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, pelo que $ab'dd' = ba'dd'$ e $cd'bb' = dc'bb'$. Portanto $ab'dd' + cd'bb' = ba'dd' + dc'bb'$ e consequentemente $(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c')$. Isto significa que

$$(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$$

donde $(ad + bc)/bd = (a'd' + b'c')/b'd'$.

Uma prova análoga mostra que $\cdot$ também está bem definida.

As propriedades associativa,comutativa e distributiva são simples de verificar. O elemento neutro de + é $0/b$ e o elemento neutro de $\cdot$ é b/b (onde $b \neq 0$). Para cada $a/b \in K$, o respectivo simétrico é a fracção $(-a)/b = a/(-b)$ e o inverso, quando $a/b \neq 0$ (isto é, $a \neq 0$), é a fracção b/a. Portanto, K é um corpo.

(c) É evidente que o caso $D = \mathbb{Z}$ nos dá $K = \mathbb{Q}$. Assim, a construção de K a partir de D é uma generalização da construção clássica dos racionais como fracções de inteiros.

(d) O facto de que D' é um subanel de K é evidente: $0 = 0/1 \in D'$ e para quaisquer $a/1, b/1 \in D'$, $a/1 - b/1 = (a - b)/1 \in D'$ e $a/1 \cdot b/1 = ab/1 \in D'$.

Definindo $f : D \to D'$ por $f(a) = a/1$ para qualquer $a \in D$, temos

$$f(a + b) = (a + b)/1 = (a \cdot 1 + b \cdot 1)/1 \cdot 1 = a/1 + b/1 = f(a) + f(b)$$

e

$$f(ab) = ab/1 = a/1 \cdot b/1 = f(a) \cdot f(b).$$

Da definição de f, f é claramente sobrejectiva. Quanto à injectividade, basta observar que

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot b \Leftrightarrow a/1 = b/1 \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Portanto, f é um isomorfismo de D em $D' \subseteq K$. O resto é óbvio: para cada $x = a/b \in K$, $b \neq 0$ (pelo que $b/1 \neq 0$) e

$$a/b = a/1 \cdot 1/b = a/1 \cdot (b/1)^{-1}.$$

(e) É fácil verificar que K' é um subcorpo de L. É óbvio que se trata então do menor subcorpo de L que contém D'. Seja f um isomorfismo de D em D' e $a/b \in K$. Consideremos a função $g : K \to K'$ definida por $g(a/b) =$

$f(a)f(b)^{-1}$. Identificando o domínio D com o conjunto $\{a/1 \mid a \in D\}$, é claro que $f = g_{|D}$. Além disso,

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow f(ad) = f(bc) \Leftrightarrow f(a)f(d) = f(b)f(c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(c)f(d)^{-1} \Leftrightarrow g(a/b) = g(c/d).$$

Portanto, g é injectiva. Da definição de g, segue também que g é sobrejectiva. Além disso,

$$\begin{aligned} g(a/b + c/d) &= g((ad+bc)/bd) \\ &= f(ad+bc)(f(bd))^{-1} \\ &= [f(a)f(d) + f(b)f(c)][f(b)^{-1}f(d)^{-1}] \\ &= f(a)f(b)^{-1} + f(c)f(d)^{-1} \\ &= g(a/b) + g(c/d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(a/b \cdot c/d) &= g(ac/bd) \\ &= f(ac)(f(bd))^{-1} \\ &= [f(a)f(c)][f(b)^{-1}f(d)^{-1}] \\ &= f(a)f(b)^{-1}f(c)f(d)^{-1} \\ &= g(a/b)g(c/d) \end{aligned}$$

para quaisquer $a/b, c/d \in K$. Logo, g é um isomorfismo.

Seja g' outro isomorfismo de K em K' tal que $f = g'_{|D}$. Então, para qualquer $a/b \in K$,

$$\begin{aligned} g'(a/b) &= g'(a/1 \cdot (b/1)^{-1}) \\ &= g'(a/1)g'((b/1)^{-1}) \\ &= g'(a/1)g'(b/1)^{-1} \\ &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= g(a/b). \end{aligned}$$

(f) A conclusão é imediata da alínea anterior.

Capítulo 2

2.8. *Mostre que se* $1+i$ *é raiz de* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$*, então* $p(x)$ *é divisível por* x^2-2x+2 *em* $\mathbb{R}[x]$*.*

Se $1+i$ é raiz de $p(x)$, então o seu conjugado $1-i$ também o é. Logo $p(x)$ é divisível por $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$.

2.9. *Seja K um corpo. Mostre que se $\varphi : K[x] \to K[x]$ é um isomorfismo tal que $\varphi(a) = a$ para qualquer $a \in K$, então $\varphi(x) = cx+d$ para algum par $c, d \in K$.*

Pelo algoritmo da divisão em $K[x]$, $\varphi(x) = q(x)x + d$ para algum $q(x) \in K[x]$ e algum $d \in K$. Como φ é sobrejectiva, existem $q_1(x)$ e $p(x)$ em $K[x]$ tais que $\varphi(q_1(x)) = q(x)$ e $\varphi(p(x)) = x$. Portanto,

$$\varphi(x) = \varphi(q_1(x))\varphi(p(x)) + \varphi(d) = \varphi(q_1(x)p(x) + d).$$

Agora, pela injectividade de φ, podemos concluir que $x = q_1(x)p(x) + d$, o que implica que $gr(q_1(x)p(x)) = 1$. Consequentemente, ou $gr(q_1(x)) = 1$ e $gr(p(x)) = 0$, ou $gr(q_1(x)) = 0$ e $gr(p(x)) = 1$. Suponhamos que acontece o primeiro caso. Então $p(x) = a \in K$, o que implica $x = \varphi(p(x)) = \varphi(a) = a$, uma contradição. Logo, ocorre necessariamente o segundo caso: $q_1(x) = c \in K$ e

$$\varphi(x) = \varphi(q_1(x)p(x) + d) = \varphi(cp(x) + d) = cx + d.$$

2.17. *Indique, justificando, quais dos seguintes polinómios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:*

$$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = 4x^3 - 3x - \tfrac{1}{2}.$$

$p(x)$, pelo critério de Eisenstein (com $p = 2$), é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

As possíveis raízes racionais de $q(x) = x^4 - x^2 - 2$ são 1, -1, 2 e -2. Nenhuma delas é raiz pelo que o polinómio não tem raízes racionais. Assim, a única hipótese dele ser redutível sobre $\mathbb{Q}$ é factorizar-se na forma

$$q(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

para alguns racionais a, b, c, d. Resolvendo o sistema correspondente

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + ac + d = -1 \\ ad + bc = 0 \\ bd = -2. \end{cases}$$

chega-se a uma solução:

$$q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2).$$

Portanto, $q(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$.

$r(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se e só se $8x^3 - 6x - 1$ o for. As possíveis raízes racionais deste último polinómio são: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

2.18. *Determine a factorização do polinómio $q(x) = x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ em factores irredutíveis.*

Sabemos já (pelo exercício anterior) que $q(x)$ não tem raízes racionais e $q(x) = (x^2+1)(x^2-2)$. Portanto, esta é a factorização de $q(x)$ em factores irredutíveis.

2.22.

(a) Calcule o produto $(2x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x + 2)$ em $\mathbb{Z}_m[x]$, para $m = 2, 3, 6$.

(b) $x^4 + 2x^3 + 2x + 2$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$?

(a)

$$\begin{aligned}(2x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x + 2) &= 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2x^2 + 3x + 2 \\ &= 4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 5x + 2 \\ &= \begin{cases} x^2 + x & \text{se } m = 2 \\ x^4 + 2x^3 + 2x + 2 & \text{se } m = 3 \\ 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \text{se } m = 6. \end{cases}\end{aligned}$$

(b) Não: pela alínea anterior, $x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x + 2)$, e nenhum destes factores, sendo de grau 2, é uma unidade de $\mathbb{Z}_3[x]$.

2.23. *Seja K um corpo. Mostre que se $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é irredutível em $K[x]$, também $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ o é.*

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, denotemos por $\overline{p(x)}$ o polinómio $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Basta verificar que se $p(x) = q(x)r(x)$ então $\overline{p(x)} = \overline{q(x)}\,\overline{r(x)}$.

2.24. (b) *Conclua que se A é um corpo, então $p(x)$ é irredutível em $A[x]$ se e só se $p(x + c)$ o é.*

Se $p(x)$ é redutível então $p(x) = q(x)r(x)$ (onde $q(x)$ e $r(x)$ têm grau ≥ 1). Pela alínea (a), isto implica $p(x + c) = q(x + c)r(x + c)$, o que mostra que $p(x + c)$ é redutível (é evidente que os polinómios $q(x + c)$ e $r(x + c)$ continuam a ter grau

≥ 1). Reciprocamente, se $p(x+c) = q(x)r(x)$ então (novamente pela alínea (a)) $p(x) = q(x-c)r(x-c)$, o que mostra que $p(x)$ é redutível.

2.26. *Para cada um dos seguintes ideais I de $\mathbb{Z}_2[x]$*

(a) $\langle x^3 + x + 1\rangle$

(b) $\langle x^2\rangle$

justifique se $\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo. Construa as tabelas de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$.

$\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo se e só se o ideal $I = \langle p(x)\rangle$ é maximal, isto é, se e só se $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_2$.

(a) O polinómio $p(x) = x^3 + x + 1$ tem grau 3 e não tem raízes em $\mathbb{Z}_2$ logo é irredutível em $\mathbb{Z}_2[x]$ (de facto, $p(0) = p(1) = 1$). Portanto, o ideal $\langle x^3+x+1\rangle$ é maximal em $\mathbb{Z}_2[x]$ e $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$ é um corpo.

(b) O polinómio $p(x) = x^2$ tem uma raiz em $\mathbb{Z}_2$ ($p(0) = 0$) logo é redutível em $\mathbb{Z}_2[x]$. Portanto, o ideal $\langle x^2\rangle$ não é maximal em $\mathbb{Z}_2[x]$ pelo que $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$ não é um corpo.

Denotando o elemento $p(x) + \langle x^2\rangle$ de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$ por $\overline{p(x)}$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle &= \{\overline{p(x)} : p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\}\\ &= \{\overline{a_0 + a_1 x} : a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2\}\end{aligned}$$

pois para cada $p(x) = x^2q(x) + r(x)$, $\overline{p(x)} = \overline{r(x)}$ (onde $gr(r(x)) \leq 2$). Portanto $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}\}$, com tabelas

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$
$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$

2.27. (b) *Determine $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$ e escreva as respectivas tabelas de anel.*

Por definição, $\mathbb{Z}_2[x]/I = \{f(x) + I \mid f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\}$. Mas, dividindo $f(x)$ por $x^2 + x + 1$, obtemos $f(x) = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$ onde $gr(r(x)) \leq 1$. É claro que então $f(x) + I = r(x) + I$. Portanto

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_2[x]/I &= \{r(x) + I \mid r(x) \in \mathbb{Z}_2[x],\ gr(r(x)) \leq 1\}\\ &= \{0 + I, 1 + I, x + I, 1 + x + I\}\end{aligned}$$

é constituído pelas classes definidas pelos restos da divisão dos polinómios de coeficientes em $\mathbb{Z}_2[x]$ por x^2+x+1.

Denotando $0+I$ por 0, $1+I$ por 1, $x+I$ por α e $1+x+I$ por β, as tabelas das operações de L são as seguintes:

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\times$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Por exemplo,

$$\alpha+\beta=(x+I)+(1+x+I)=1+I=1$$

e

$$\alpha\beta=x(1+x)+I=x+x^2+I=1+I=1.$$

2.28. *Considere o polinómio* $p(x)=x^3+2x^2+1\in\mathbb{Z}_5[x]$.

(a) Mostre que $K=\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ *é um corpo e descreva os seus elementos.*

(b) Determine o cardinal de K *e a sua característica.*

(a) O polinómio $p(x)=x^3+2x^2+1$ tem grau 3 e não tem raízes em $\mathbb{Z}_5$ logo é irredutível em $\mathbb{Z}_5[x]$ (de facto, $p(0)=1$, $p(1)=4$, $p(2)=2$, $p(3)=1$ e $p(4)=2$). Portanto, o ideal $\langle p(x)\rangle$ é maximal em $\mathbb{Z}_5[x]$ e $K=\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ é um corpo. Tem-se

$$\begin{aligned} K &= \{a_0+a_1x+a_2x^2+\langle p(x)\rangle \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Z}_5\} \\ &\cong \{a_0+a_1\theta+a_2\theta^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Z}_5\} \end{aligned}$$

com $\theta^3=-2\theta^2-1=3\theta^2+4$.

(b) Cada elemento de K admite uma única expressão $a_0+a_1\theta+a_2\theta^2$, com $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Z}_5$, pelo que $|K|=5^3=125$. Como $\mathbb{Z}_5\subseteq K$ e a característica de $\mathbb{Z}_5$ é 5, obtemos $car(K)=5$.

2.33. *Seja* p *um inteiro primo. Prove que o* polinómio ciclotómico

$$\Phi_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$$

é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Pelo Exercício 2.24, um polinómio $p(x)$ é irredutível se e só se $p(x+c)$ é irredutível (onde c é uma constante). Em particular, $\Phi_p(x)$ é irredutível se e só se

$$\Phi_p(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x}$$

é irredutível. Este último polinómio é igual a

$$x^{p-1} + px^{p-2} + \binom{p}{2}x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{2}x + p.$$

Quando p é primo, observámos na demonstração da Proposição 1.5 que p divide $\binom{p}{i}$ (para $1 \leq p \leq p-1$). Basta agora aplicar o critério de Eisenstein.

Nota: Se n não é primo, então $\Phi_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ factoriza-se em $\mathbb{Q}[x]$. Por exemplo,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1).$$

Capítulo 3

3.5. (d) *Determine o inverso de* $\theta^2 - 6\theta + 8$ *na extensão simples* $\mathbb{Q}(\theta)$*, onde* $\theta \neq 0$ *é tal que* $\theta^4 - 6\theta^3 + 9\theta^2 + 3\theta = 0$.

O polinómio $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x = x(x^3 - 6x^2 + 9x + 3)$, do qual θ é raiz, é redutível sobre $\mathbb{Q}$. Como $\theta \neq 0$, então θ é raiz do factor $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$. Este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein, $p = 3$), logo é o polinómio mínimo $m(x)$ de θ sobre $\mathbb{Q}$. Seja $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Uma vez que $m(x) = xf(x) + x + 3$ e $f(x) = (x-9)(x+3) + 35$ (o que confirma que $mdc(m(x), f(x)) = 1$), então

$$35 = f(x) - (x-9)(m(x) - xf(x)) = (x^2 - 9x + 1)f(x) - (x-9)m(x),$$

ou seja,

$$1 = \frac{1}{35}[(x^2 - 9x + 1)f(x) - (x-9)m(x)].$$

Substituindo x por θ obtemos $1 = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1)f(\theta)$, o que mostra que

$$(\theta^2 - 6\theta + 8)^{-1} = f(\theta)^{-1} = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1).$$

3.8. *Seja* L *uma extensão dum corpo* K *e* $\theta \in L$ *um elemento algébrico de grau* n *sobre* K*. Prove que todo o elemento de* $K(\theta)$ *se pode exprimir de modo único na forma* $a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{n-1}\theta^{n-1}$ *com* $a_i \in K$ *(*$i = 0, \ldots, n-1$*).*

Como θ é algébrico sobre K, $K(\theta) = K[\theta] = \{f(\theta) \mid f(x) \in K[x]\}$, como vimos nas aulas. Seja $m(x)$ o polinómio mínimo de θ sobre K. Para cada elemento $f(\theta) \in K[\theta]$, consideremos o polinómio $f(x)$ a ele associado. Dividindo $f(x)$ por $m(x)$ obtemos $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$, onde $gr(r(x)) < n$. Então

$$f(\theta) = q(\theta)m(\theta) + r(\theta) = r(\theta)$$

e $r(\theta)$ é da forma $a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{n-1}\theta^{n-1}$ com $a_i \in K$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. A unicidade desta representação é também simples de provar:

Se $f(\theta) = r_1(\theta) = r_2(\theta)$, então $r_1(\theta) - r_2(\theta) = 0$. Consideremos o polinómio $h(x) = r_1(x) - r_2(x)$, que tem grau inferior a n e admite θ por raiz. Como o polinómio mínimo de θ sobre K tem grau n, superior ao de $h(x)$, este tem que ser igual a zero, donde $r_1(x) = r_2(x)$.

3.10. (b) *Determine o polinómio mínimo sobre* $\mathbb{Q}$ *de* $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Seja $\theta = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Como $\theta^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ então $(\theta^2 - 8)^2 = 60$. Assim $\theta^4 - 16\theta^2 + 4 = 0$ pelo que θ é raiz de $x^4 - 16x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Este polinómio é irredutivel em $\mathbb{Q}[x]$ e é assim o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$. De facto:

- Não tem raízes racionais: as únicas possibilidades são ± 1, ± 2, ± 4, nenhuma o é.
- Portanto, a única possibilidade de ser redutível é factorizar-se na forma

  $$x^4 - 16x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b').$$

  Isto será possível precisamente se o sistema

  $$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + aa' + b' = -16 \\ ab' + a'b = 0 \\ bb' = 4 \end{cases}$$

  tiver solução em $\mathbb{Q}$. Resolvendo vem

  $$\begin{cases} a' = -a \\ \hline a(b' - b) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b' = b \\ \hline \end{cases}$$

O caso $a = 0$ implica $b + b' = -16$ e $bb' = 4$, ou seja, $b^2 + 16b + 4 = 0$, que não tem raízes racionais. Por outro lado, o caso $b' = b$ implica $b^2 = 4$, ou seja, $b = 2$ ou $b = -2$. Substituindo na segunda equação obtemos

$$-a^2 + 4 = -16 \Leftrightarrow a^2 = 20 \quad \text{ou} \quad -a^2 - 4 = -16 \Leftrightarrow a^2 = 12,$$

ambas impossíveis em $\mathbb{Q}$.

Em conclusão, o sistema é impossível.

3.12. *Seja L uma extensão finita de K. Prove que:*

(a) Se $[L:K]$ é um número primo, então L é uma extensão simples de K.

(b) Se $\theta \in L$, então o grau de θ é um divisor de $[L:K]$. Conclua que se tem $L = K(\theta)$ se e só se o grau de θ coincidir com $[L:K]$.

(c) Se $f(x) \in K[x]$ é irredutível sobre K e o grau de $f(x)$ é um número primo com $[L:K]$ e maior do que 1, então $f(x)$ não tem raízes em L.

(a) Se L é uma extensão finita de K todos os seus elementos são algébricos sobre K. Como $[L:K] = p > 1$, existe $\theta \in L \setminus K$. Pelo Teorema da Torre,

$$p = [L:K] = [L:K(\theta)][K(\theta):K]. \tag{1}$$

Como $\theta \notin K$, $[K(\theta):K] > 1$. Mas p é primo, donde só pode ser $[K(\theta):K] = p$ e $[L:K(\theta)] = 1$. Esta última igualdade diz-nos que $L = K(\theta)$, pelo que L é uma extensão simples de K.

(b) Como, por definição, o grau de θ coincide com $[K(\theta):K]$, por (1) este é um divisor de $[L:K]$ e coincide com $[L:K]$ se e só se $[L:K(\theta)] = 1$, ou seja, $L = K(\theta)$.

(c) Suponhamos, por absurdo, que $f(x)$ tinha uma raiz θ em L. Seja $m(x)$ o polinómio mónico associado a $f(x)$. Evidentemente, trata-se do polinómio mínimo de θ sobre K. Portanto, $[K(\theta):K] = gr(f(x))$ seria um número primo com $[L:K]$, o que é absurdo por (1). Logo $f(x)$ não tem raízes em L.

3.15. (e) *Determine o grau sobre $\mathbb{Q}$ e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$, onde $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ e $\beta^2 - \beta = 1$.*

Pelo Teorema da Torre,

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}].$$

Como $x^3 - x + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pois não tem raízes racionais), trata-se do polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$ e $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ é uma base desta extensão simples. Portanto, $\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Por

outro lado, β é raiz do polinómio $f(x) = x^2 - x - 1$. Será que este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$? Sim, pelo exercício anterior (alínea (c)): $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e o seu grau é um número primo com $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e maior do que 1, pelo que não tem raízes em $\mathbb{Q}(\alpha)$. Como é de grau 3 será irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$ e $\{1, \beta\}$ é uma base desta extensão simples. Concluindo, $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 6$ e $\{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$ é uma base da extensão dupla $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ de $\mathbb{Q}$.

3.17. *Sejam $\alpha^3 = 2$, w uma raiz cúbica da unidade e $\beta = w\alpha$. Determine a dimensão e uma base de $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ sobre $\mathbb{Q}$.*

Pelo Teorema da Torre,

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}].$$

Como $x^3 - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein), trata-se do polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ e $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ é uma base desta extensão simples. Portanto,

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Por outro lado, β é também raiz do polinómio $f(x) = x^3 - 2$ (pois $\beta^3 = w^3\alpha^3 = 2$). Será que este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$? Mas agora este polinómio já é redutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$, uma vez que α é uma das suas raízes. Com efeito, $x^3 - 2 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$. Agora dois casos podem ocorrer, ou β é raiz do primeiro factor, ou é raiz do segundo factor:

Caso 1: $\beta = \alpha$. Neste caso $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha)$ e o problema já está resolvido (a dimensão é 3 e a base é $\{1, \alpha, \alpha^2\}$).

Caso 2: $\beta \neq \alpha$. Neste caso β é raiz de $x^2 + \alpha x + \alpha^2$. Agora, para indagarmos da sua irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$, não podemos utilizar o Exercício 3.12 (c), pois este polinómio não tem coeficientes racionais. Para verificarmos isso não temos outra hipótese senão investigar directamente se tem alguma raiz em $\mathbb{Q}(\alpha)$, ou seja, se existem racionais a, b e c tais que

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)^2 + \alpha(a + b\alpha + c\alpha^2) + \alpha^2 = 0.$$

Efectuando os cálculos em $\mathbb{Q}(\alpha)$, esta equação é ainda equivalente a

$$(a^2 + 4bc + 2c) + (2ab + 2c^2 + a)\alpha + (2ac + b^2 + b + 1)\alpha^2 = 0.$$

Como $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{Q}(\alpha)$ (sobre $\mathbb{Q}$), obtemos

$$\begin{cases} a^2 + 4bc + 2c = 0 \\ 2ab + 2c^2 + a = 0 \\ 2ac + b^2 + b + 1, \end{cases}$$

que é um sistema impossível em $\mathbb{Q}$:

Se $a, c \neq 0$ então

$$\begin{cases} a^3 + 4abc + 2ac = 0 \\ 4abc + 4c^3 + 2ac = 0 \end{cases}$$

o que implica $a^3 = 4c^3$, ou seja, $a/c = \sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$!!!; para $a = 0$ ou $c = 0$ temos $b^2 + b + 1 = 0$, o que é impossível em $\mathbb{Q}$.

Portanto, $x^2 + \alpha x + \alpha^2$ é o polinómio mínimo de β sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. Concluindo, $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 6$ e $\{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$ é uma base da extensão $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ de $\mathbb{Q}$.

3.18. *Determine para quais dos seguintes polinómios $f(x) \in K[x]$ existem extensões $K(\alpha)$ tais que $f(x)$ é o polinómio mínimo de α:*

(a) $x^2 - 4$, $K = \mathbb{Q}$. *(b)* $x^3 + x + 2$, $K = \mathbb{Z}_3$. *(c)* $x^2 + 1$, $K = \mathbb{Z}_5$.

(a) Como $x^2 - 4$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$ (pois tem raízes racionais), não existe nenhuma extensão $Q(\alpha)$ tal que $x^2 - 4$ é o polinómio mínimo de α.

(b) $x^3 + x + 2$ também é redutível sobre $\mathbb{Z}_3$ (pois tem raízes neste corpo), logo não existe nenhuma extensão $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ tal que $x^3 + x + 2$ é o polinómio mínimo de α.

(c) $x^2 + 1$ também é redutível sobre $\mathbb{Z}_5$ (pois tem raízes neste corpo), logo não existe nenhuma extensão $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ tal que $x^2 + 1$ é o polinómio mínimo de α.

3.19. *Para cada uma das extensões de $\mathbb{Q}$ indicadas averigúe se θ gera a mesma extensão:*

(a) $\theta = 2 + \sqrt[3]{4}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

(b) $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) $\theta = u^2 + u + 1$, $\mathbb{Q}(u)$, *com* $u^2 + 5u - 5 = 0$.

(a) $x^3 - 2$ é o polinómio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$, logo $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ e

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Então $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, pelo que $\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Por outro lado, como $\theta - 2 = \sqrt[3]{4}$, então $(\theta-2)^3 = 4$, ou seja, θ é raiz do polinómio $x^3-6x^2+12x-12$. Como este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein), é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$,o que mostra que também $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ é igual a 3.

Concluindo, como $\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e $\dim \mathbb{Q}(\theta) = \dim \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, as duas extensões coincidem.

(b) Neste caso, as extensões são diferentes, pois $\theta \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De facto, $\theta = \sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ implicaria $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou seja, $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, o que é um absurdo, pois não existem racionais a e b tais que $\sqrt{3} = a+b\sqrt{2}$: $b = 0$ implicaria $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$; $a = 0$ e $b \neq 0$ implicariam $\sqrt{\frac{3}{2}} = b \in \mathbb{Q}$ e $a, b \neq 0$ implicariam $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$!!!

(c) Claramente $\theta \in \mathbb{Q}(u)$, donde $\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{Q}(u)$. Por outro lado, $\theta = u^2+u+1 = 5-5u+u+1 = 6-4u$, ou seja, $u = \frac{6-\theta}{4} \in \mathbb{Q}(\theta)$, o que mostra que também $\mathbb{Q}(\theta) \supseteq \mathbb{Q}(u)$. Portanto as extensões coincidem.

3.21. *É possível, usando régua (não graduada) e compasso, construir o ponto*

$$\left(\sqrt{5\sqrt{2}-3}+\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}, 0\right)$$

a partir dos pontos $(0,0)$ *e* $(1,0)$*?*

Sejam $\theta_1 = \sqrt{5\sqrt{2}-3}$ e $\theta_2 = \sqrt{2-\sqrt[3]{2}}$. É fácil de ver que θ_1 é raiz de $p(x) = x^4+6x^2-41$ e θ_2 é raiz de $q(x) = x^6-6x^4+12x^2-6 = 0$. O polinómio $q(x)$ é claramente irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein) pelo que $[\mathbb{Q}(\theta_2) : \mathbb{Q}] = 6$ e θ_2 não é construtível a partir dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$. Quanto ao polinómio $p(x)$, também é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, mas dá mais trabalho a verificar isso:

Não tem raízes racionais (as únicas possibilidades, ± 1 e ± 41, claramente não o são). Assim, se fosse redutível, a única possibilidade de factorização seria como produto de dois polinómios de grau 2:

$$x^4+6x^2-41 = (ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c').$$

Desenvolvendo esta igualdade chegaremos a um sistema de equações, impossível em $\mathbb{Q}$, o que confirma que $p(x)$ é, de facto, irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Portanto, $[\mathbb{Q}(\theta_1) : \mathbb{Q}] = 4$. Como o recíproco do Teorema 3.8 não é verdadeiro (observação feita a seguir à demonstração do Teorema) não podemos para já concluir da construtibilidade de θ_1 a partir dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$. No entanto, o que afirmámos na Observação ao Teorema 3.8 dá-nos a resposta: $\sqrt{5\sqrt{2}-3}$ é construtível pois

obtém-se dos números racionais 2, 3 e 5 por sucessivas aplicações das operações de subtracção, multiplicação e raiz quadrada.

Concluindo, $\theta_1 + \theta_2$ não é construtível a partir dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ (se fosse, como θ_1 é, também $(\theta_1 + \theta_2) - \theta_1 = \theta_2$ seria).

3.22. *Seja p um inteiro primo positivo.*

(a) Determine a dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{p+\sqrt{p}})$ de $\mathbb{Q}$.

(b) Será possível construir o ponto $(\sqrt{p+\sqrt{p}}, \sqrt{p+\sqrt{p}})$ a partir dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$?

(a) Denotemos o número $\sqrt{p+\sqrt{p}}$ por θ. Como $\theta^2 = p+\sqrt{p}$, então $(\theta^2-p)^2 = p$, pelo que θ é raiz do polinómio

$$q(x) = (x^2-p)^2 - p = x^4 - 2px^2 + p(p-1) \in \mathbb{Q}[x].$$

Pelo critério de Eisenstein, $q(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (basta considerar o primo p). Portanto, $q(x)$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, pelo que $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 4$ e $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$ é uma base desta extensão.

(b) Sim, pela Observação ao Teorema 3.8 (veja o exercício anterior).

3.24. *Considere o polinómio $p(x) = 2x^7 + 12x^5 + 3x^3 + 6x + 6$ em $\mathbb{Q}[x]$.*

(a) Prove que $p(x)$ tem uma raiz real α.

(b) Justifique se α é ou não um real construtível a partir dos racionais.

(a) Em $\mathbb{C}[x]$, $p(x)$ decompõe-se em 7 factores lineares (pois $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado) correspondentes às suas 7 raízes em $\mathbb{C}$. Além disso, como sabemos, as raízes complexas não reais aparecem aos pares. Então, como 7 é ímpar, uma das 7 raízes raízes é necessariamente real.

(b) O polinómio $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$ (pelo critério de Eisenstein, $p = 3$). Então o polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ é o polinómio mónico associado de $p(x)$, ou seja, o polinómio $x^7+6x^5+\frac{3}{2}x^3+3x+3$. Assim $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 7$. Como este número não é uma potência de 2, pelo critério algébrico estudado sobre a construtibilidade (por régua e compasso) de números, podemos concluir que α não é construtível a partir dos racionais.

3.25. *Mostre que x^2+1 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_3$. Sendo u uma raiz deste polinómio determine o número de elementos de $\mathbb{Z}_3(u)$ e as tabelas de adição e multiplicação.*

Para mostrar a irredutibilidade basta verificar que nenhum elemento de $\mathbb{Z}_3$ é raiz de x^2+1.

Pelo que vimos na página 69,

$$\mathbb{Z}_3(u) \cong \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^2+1\rangle} = \{a_0 + a_1 x + \langle x^2+1\rangle \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_3\}.$$

Denotando $0+\langle x^2+1\rangle$, $1+\langle x^2+1\rangle$, $2+\langle x^2+1\rangle$, $x+\langle x^2+1\rangle$, $2x+\langle x^2+1\rangle$, $1+x+\langle x^2+1\rangle$, $1+2x+\langle x^2+1\rangle$, $2+x+\langle x^2+1\rangle$ e $2+2x+\langle x^2+1\rangle$ por, respectivamente, $0, 1, 2, u, a, b, c, d, f$, as tabelas das operações são as seguintes:

$+$	0	1	2	u	a	b	c	d	f
0	0	1	2	u	a	b	c	d	f
1	1	2	0	b	c	d	f	u	a
2	2	0	1	d	f	u	a	b	c
u	u	b	d	a	0	c	1	f	2
a	a	c	f	0	u	1	b	2	d
b	b	d	u	c	1	f	2	a	0
c	c	f	a	1	b	2	d	0	u
d	d	u	b	f	2	a	0	c	1
f	f	a	c	2	d	0	u	1	b

$\cdot$	0	1	2	u	a	b	c	d	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	u	a	b	c	d	f
2	0	2	1	a	u	f	d	c	b
u	0	u	a	2	1	d	b	f	c
a	0	a	u	1	2	c	f	b	d
b	0	b	f	d	c	a	2	1	u
c	0	c	d	b	f	2	u	a	1
d	0	d	c	f	b	1	a	u	2
f	0	f	b	c	d	u	1	2	a

3.27. *Considere o polinómio $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.*

(a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

(b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

(a) As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

(b) Como $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x]\} \\ &= \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x], gr(a(x)) \leq 2\} \\ &\cong \mathbb{Q}(\theta), \end{aligned}$$

onde $8\theta^3 - 6\theta - 1 = 0$. Como $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 3$ pelo que

$$\mathbb{Q}(\theta) = \{a + b\theta + c\theta^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Nesta extensão já o polinómio $8x^3 - 6x - 1$ tem uma raiz (precisamente o elemento θ) pelo que é redutível. Dividindo $8x^3 - 6x - 1$ pelo factor $x - \theta$ obtém-se:

$$8x^3 - 6x - 1 = (x - \theta)(8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6).$$

Teremos agora que verificar se o factor $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6$ é ou não redutível sobre $\mathbb{Q}(\theta)$ para concluirmos se esta é ou não a extensão de decomposição do polinómio $p(x)$.

Trata-se de um polinómio de grau 2 pelo que bastará verificar se tem raízes em $\mathbb{Q}(\theta)$. Averiguemos então se existem racionais a, b, c tais que

$$8(a + b\theta + c\theta^2)^2 + 8\theta(a + b\theta + c\theta^2) + 8\theta^2 - 6 = 0.$$

Efectuando os cálculos obtemos

$$(8a^2 - 6) + (16ab + 8a)\theta + (8b^2 + 16ac + 8b + 8)\theta^2 + (16bc + 8c)\theta^3 + 8c^2\theta^4 = 0.$$

Mas $8\theta^3 = 6\theta + 1$ (donde $8\theta^4 = 6\theta^2 + \theta$) pelo que podemos ainda escrever

$$(8a^2 - 6 + 2bc + c) + (16ab + 8a + 12bc + 6c + c^2)\theta + (8b^2 + 16ac + 8b + 8 + 6c^2)\theta^2 = 0.$$

Então, como $1, \theta$ e θ^2 são linearmente independentes, esta igualdade é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 8a^2 - 6 + 2bc + c0 \\ 16ab + 8a + 12bc + 6c + c^2 = 0 \\ 8b^2 + 16ac + 8b + 8 + 6c^2 = 0. \end{cases}$$

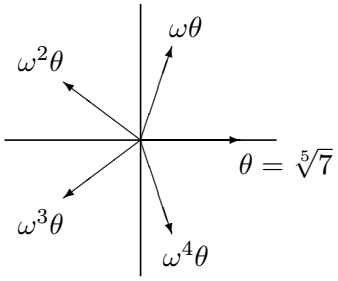
Este sistema não parece ser fácil de resolver. Tem no entanto uma solução fácil de encontrar após alguma procura e experimentação: $a = 1, b = 0, c = -2$. Isto mostra que o elemento $1 - 2\theta^2$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ é uma raiz de $p(x)$ pois é raiz do seu factor $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6$. Portanto este factor é divisível por $x - (1 - 2\theta^2)$. Efectuando a divisão obtemos $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6 = (x - 1 + 2\theta^2)(8x + 8 + 8\theta - 16\theta^2)$. Em conclusão,

$$\begin{aligned} 8x^3 - 6x - 1 &= (x - \theta)(8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6) \\ &= 8(x - \theta)(x - 1 + 2\theta^2)(x + 1 + \theta - 2\theta^2) \\ &= 8(x - \theta)(x - (1 - 2\theta^2))(x - (-1 - \theta + 2\theta^2)) \end{aligned}$$

o que mostra que θ, $1 - 2\theta^2$ e $-1 - \theta + 2\theta^2$ são as três raízes de $p(x)$ e que $\mathbb{Q}(\theta)$ é de facto a sua extensão de decomposição (que tem dimensão 3).

3.29. *Seja θ a raiz real do polinómio $x^5 - 7$. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\theta)$ de $\mathbb{Q}$.*

É claro que $\theta = \sqrt[5]{7}$ (as outras 4 raízes não são reais):



$\omega =$ raiz quinta de 1, no $1^{\underline{o}}$ quadrante

Portanto, θ tem polinómio mínimo $x^5 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$. Qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$

$$\Phi : \mathbb{Q}(\theta) \to \mathbb{Q}(\theta)$$

mantém fixos os números racionais e transforma θ numa raiz do mesmo polinómio em $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \subseteq \mathbb{R}$. Logo, necessariamente, $\Phi(\theta) = \theta$ e só existe um $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[5]{7} & \mapsto & \sqrt[5]{7} \end{array}$$

que é a identidade. Assim, $Gal(\mathbb{Q}(\theta), \mathbb{Q})$ é o grupo trivial $S_1 = \{id\}$.

3.30. *Seja L uma extensão de $\mathbb{Q}$. Determine os $\mathbb{Q}$-automorfismos de L para:*

(a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) O elemento $\sqrt{2}$ tem polinómio mínimo $x^2 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Pela Proposição 3.15, qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ transforma raízes deste polinómio em raízes do mesmo polinómio. Existem, pois, precisamente dois $\mathbb{Q}$-automorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\sqrt{2}}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt{2} & \mapsto & \sqrt{2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \Phi_{-\sqrt{2}}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt{2} & \mapsto & -\sqrt{2}. \end{array}$$

O primeiro é a identidade e o segundo aplica cada elemento $a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ em $a - b\sqrt{2}$.

(c) Cada $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. A restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$. Então, pela Proposição 3.15, só há duas possibilidades para esta restrição, como vimos na alínea anterior: é a identidade ou aplica cada elemento $a+b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ em $a - b\sqrt{2}$. Portanto, Φ prolonga o isomorfismo identidade de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ou prolonga o isomorfismo $\Phi_{-\sqrt{2}}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Usando novamente a Proposição 3.15, como $x^2 - 3$ é o polinómio mínimo de $\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, estes dois isomorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ só podem ser prolongados a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ aplicando $\sqrt{3}$ em $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$. Portanto, só existem 4 possibilidades para Φ: a identidade e

$$\Phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = \sqrt{3};$$

$$\Phi(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3};$$

$$\Phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

O grupo de Galois tem, pois, neste caso, 4 elementos, que designamos respectivamente por $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$:

$$\Phi_0(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

$$\Phi_1(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

$$\Phi_2(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3},$$

$$\Phi_3(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3}.$$

3.31.

(a) Para as extensões L de $\mathbb{Q}$ do exercício anterior, calcule os respectivos grupos de Galois, $Gal(L, \mathbb{Q})$.

(b) Verifique em quais desses casos a correspondência de Galois entre os subgrupos do grupo de Galois e as extensões intermédias (entre $\mathbb{Q}$ e L) é uma bijecção.

(a) No primeiro caso, $Gal(L, \mathbb{Q}) = \{id, \Phi_{-\sqrt{2}}\}$ é um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

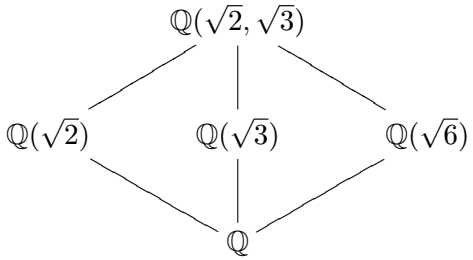
No terceiro caso, o grupo de Galois tem 4 elementos, sendo a tabela do grupo a seguinte:

$\circ$	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Φ_0	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Φ_1	Φ_1	Φ_0	Φ_3	Φ_2
Φ_2	Φ_2	Φ_3	Φ_0	Φ_1
Φ_3	Φ_3	Φ_2	Φ_1	Φ_0

Em conclusão, este grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(b) No primeiro caso, as extensões intermédias são só os próprios $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como $\mathbb{Z}_2$ só tem os dois subgrupos triviais ($\{0\}$ e o próprio $\mathbb{Z}_2$), neste caso a correspondência de Galois é uma bijecção.

No segundo caso, o diagrama com as extensões intermédias é o seguinte:



A lista de subgrupos de $Gal(L,\mathbb{Q})$ é $\{\Phi_0\}$, $\{\Phi_0,\Phi_1\}$, $\{\Phi_0,\Phi 2\}$, $\{\Phi_0,\Phi_3\}$, $\{\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\}$. Neste caso, também há bijecção.

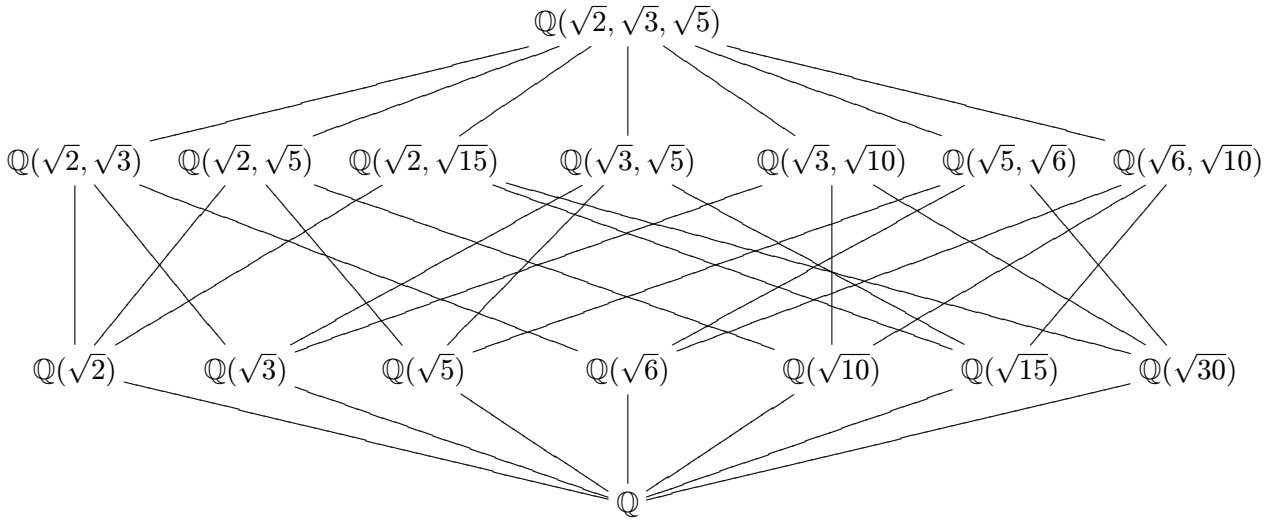
3.32.

(a) Determine os corpos intermédios entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$.

(b) Calcule o respectivo grupo de Galois e compare os resultados.

(a) Como $2\times 3\times 5 = 30$ tem como divisores 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30, as extensões simples entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ são $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{30})$. Quanto às extensões duplas, temos:
$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{6})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{10})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{15},\sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{15})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{10},\sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{10},\sqrt{15})$.

O diagrama seguinte mostra-nos todas as extensões intermédias entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$:



(b) Neste caso, $Gal(L,\mathbb{Q})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

3.33. *Considere a extensão $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.*

(a) Como se define o grupo de Galois de L (sobre $\mathbb{Q}$)? Determine-o.

(b) Indique todas as extensões intermédias de $\mathbb{Q}$ em L.

(c) L é uma extensão normal de $\mathbb{Q}$? Justifique.

(a) Seja $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$. Cada $\Phi \in Gal(L,\mathbb{Q})$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}\}$. A restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})} : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$. Então, pela Proposição 3.15, só há duas possibilidades para esta restrição: é a identidade ou aplica cada elemento $a + b\sqrt{3}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ em $a - b\sqrt{3}$. Portanto, Φ prolonga o isomorfismo identidade de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ou prolonga o isomorfismo $\Phi_{-\sqrt{3}}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Pela Proposição 3.15, como $x^3 - 2$ é o polinómio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, o número de prolongamentos de Φ a L é igual ao número de raízes distintas de $x^3 - 2$ em L, ou seja, um (que corresponde à única raiz $\sqrt[3]{2}$). Assim, os dois isomorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ só podem ser prolongados a $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$ aplicando $\sqrt[3]{2}$ em $\sqrt[3]{2}$, pelo que existem exactamente duas possibilidades para Φ: a identidade ou

$$\Phi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},\ \Phi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}.$$

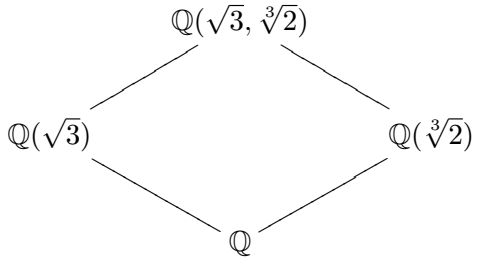
O grupo de Galois tem pois dois elementos:

$$\Phi_0(a + b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2}) = a + b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2},$$

$$\Phi_1(a + b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2}) = a - b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2}.$$

Neste caso, $Gal(L, \mathbb{Q})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

(b) Note que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$, pelo que as únicas extensões intermédias de $\mathbb{Q}$ em L são:



(c) Não, pois $[L : \mathbb{Q}] = 6$ mas $|Gal(L, \mathbb{Q})| = 2$ (e pelo Teorema 3.21, se $|Gal(L, K)|$ é diferente de $[L : K]$, então L não é uma extensão normal de K).

3.38. (b) *Calcule o grupo de Galois do polinómio $f(x) = x^4 - 2$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$.*

Uma vez que o polinómio $f(x) = x^4 - 2$ tem raízes

$$\theta_1 = \sqrt[4]{2},\ \theta_2 = -\sqrt[4]{2},\ \theta_3 = \sqrt[4]{2}\,i,\ \theta_4 = -\sqrt[4]{2}\,i$$

então $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ é a extensão de decomposição de $f(x)$. Portanto, o grupo pedido é o grupo $Gal(L, \mathbb{Q}) = Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q})$. Teremos então que determinar todos os $\mathbb{Q}$-automorfismos de L.

Cada $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt[4]{2}, i\}$ (uma vez que todo o elemento de L é uma combinação linear racional de potências de $\sqrt[4]{2}$ e i). A respectiva restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})} : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$ (ou seja, é um prolongamento do isomorfismo $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$). Estes podem ser determinados com o auxílio da Proposição 3.15:

O elemento $\sqrt[4]{2}$ tem polinómio mínimo $x^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, o que significa em particular que

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}.$$

Pela Proposição 3.15, o isomorfismo $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ pode ser prolongado a um homomorfismo injectivo $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to L$ se e só se $x^4 - 2$ tem uma raiz em L, e o número desses prolongamentos é igual ao número de raízes distintas de $x^4 - 2$ em L, ou seja 4:

$$\begin{array}{rccc} \phi_1: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_1=\sqrt[4]{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_2: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_2=-\sqrt[4]{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_3: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_3=\sqrt[4]{2}\,i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_4: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_4=-\sqrt[4]{2}\,i. \end{array}$$

Estes são pois os únicos homomorfismos injectivos $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\to L$ que prolongam a $id:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ e, consequentemente, os $\Phi: L\to L$ que procuramos, quando restritos a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, coincidem necessariamente com um dos ϕ_i $(i=1,2,3,4)$. Dito de outro modo, claramente equivalente, os $\Phi: L\to L$ que procuramos são os prolongamentos a L de cada um dos seguintes isomorfismos de corpos:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_1: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_2: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_3: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,i) \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\,i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_4: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,i) \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\,i. \end{array}$$

$x^2+1\in\mathbb{Q}[x]$ é o polinómio mínimo de i sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Usando novamente a Proposição 3.15, como cada um dos $\tilde{\phi}_i$ mantém fixos os coeficientes de x^2+1 e este polinómio tem duas raízes distintas em L, podemos concluir que cada um dos isomorfismos $\tilde{\phi}_i$ vai ter dois prolongamentos a homomorfismos injectivos de extensões $L\to L$, um que transforma i em i e o outro transforma i na outra raiz $-i$.

Começando com $\tilde{\phi}_1$

$$\begin{array}{ccc} L & \overset{\Phi=?}{\dashrightarrow} & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{x^2+1} & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \xrightarrow{\tilde{\phi}_1=id} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \boxed{x^2+1} \end{array}$$

obtemos

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_2: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & -i. \end{array}$$

Φ_1 é simplesmente a identidade e Φ_2 é o isomorfismo definido por

$$a_0+a_1\sqrt[4]{2}+a_2\sqrt[4]{4}+a_3\sqrt[4]{8}+a_4\,i+a_5\sqrt[4]{2}\,i+a_6\sqrt[4]{4}\,i+a_7\sqrt[4]{8}\,i$$

$$\downarrow$$

$$a_0+a_1\sqrt[4]{2}+a_2\sqrt[4]{4}+a_3\sqrt[4]{8}-a_4\,i-a_5\sqrt[4]{2}\,i-a_6\sqrt[4]{4}\,i-a_7\sqrt[4]{8}\,i.$$

Fazendo o mesmo para $\tilde{\phi}_2$, $\tilde{\phi}_3$ e $\tilde{\phi}_4$ obtemos sucessivamente

$$\begin{array}{rccc} \Phi_3: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_4: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & -i \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_5: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\,i \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_6: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\,i \\ & i & \mapsto & -i \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_7: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\,i \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_8: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\,i \\ & i & \mapsto & -i. \end{array}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \Phi_7(a_0+a_1\sqrt[4]{2}+a_2\sqrt[4]{4}+a_3\sqrt[4]{8}+a_4\,i+a_5\sqrt[4]{2}\,i+a_6\sqrt[4]{4}\,i+a_7\sqrt[4]{8}\,i) &= \\ = a_0-a_1\sqrt[4]{2}\,i-a_2\sqrt[4]{4}+a_3\sqrt[4]{8}\,i+a_4\,i+a_5\sqrt[4]{2}-a_6\sqrt[4]{4}\,i-a_7\sqrt[4]{8} & \\ = a_0+a_5\sqrt[4]{2}-a_2\sqrt[4]{4}-a_7\sqrt[4]{8}+a_4\,i-a_1\sqrt[4]{2}\,i-a_6\sqrt[4]{4}\,i+a_3\sqrt[4]{8}\,i. & \end{aligned}$$

Portanto, $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i),\mathbb{Q})=\{\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,\Phi_5,\Phi_6,\Phi_7,\Phi_8\}$. Observemos ainda como pode ser descrito como um subgrupo de $\mathcal{S}_4$:

$$\Phi_1=\begin{pmatrix}\theta_1&\theta_2&\theta_3&\theta_4\\ \theta_1&\theta_2&\theta_3&\theta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=id$$

$$\Phi_2=\begin{pmatrix}\theta_1&\theta_2&\theta_3&\theta_4\\ \theta_1&\theta_2&\theta_4&\theta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(34)$$

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34), \quad \Phi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\Phi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1324), \quad \Phi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$$

$$\Phi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1423), \quad \Phi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23).$$

Em conclusão:

$$\boxed{Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q}) = \Big\{id, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\Big\}}$$

3.42. *Considere um polinómio $f(x)$ irredutível, de grau 3, escrito na sua forma reduzida $x^3 + px + q$, e as suas três raízes complexas distintas a, b, e c.*

(a) Verifique que $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+ac+bc=p \\ abc=-q. \end{cases}$

(b) A partir da alínea anterior, mostre que $((a-b)(a-c)(b-c))^2 = -4p^3 - 27q^2$.

(c) Seja D o número $-4p^3 - 27q^2$ da alínea anterior. Prove que se $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ e $\Phi \in Gal(f(x), \mathbb{Q})$, então $\Phi(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$ e, portanto, $Gal(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{A}_3$.

(d) Prove que se $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ está na extensão de decomposição de $f(x)$ e, portanto, $Gal(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$.

(a) Basta observar que $x^3 + px + q = (x-a)(x-b)(x-c)$ é equivalente a $x^3 + px + q = x^3 + (-c-a-b)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$.

(b) Basta, com um pouco de paciência, desenvolver ambos os membros (substituindo, no segundo, p por $ab+ac+bc$ e q por $-abc$), até as expressões coincidirem.

(c) Pela Proposição 3.19, $Gal(f(x),\mathbb{Q})$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathcal{S}_3$. Seja $\Phi \in Gal(f(x),\mathbb{Q}) = Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})$. Por definição, Φ, sendo um $\mathbb{Q}$-automorfismo, terá que preservar os racionais, logo $\Phi(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$, isto é, $\Phi((a-b)(a-c)(b-c)) = (a-b)(a-c)(b-c)$. Consequentemente,

$$(\Phi(a)-\Phi(b))(\Phi(a)-\Phi(c))(\Phi(b)-\Phi(c)) = (a-b)(a-c)(b-c). \qquad (2)$$

Mas Φ permuta as raízes a, b e c entre si. Para que se cumpra (2), essa permutação não pode ser ímpar (se fosse ímpar teríamos

$$(\Phi(a)-\Phi(b))(\Phi(a)-\Phi(c))(\Phi(b)-\Phi(c)) = -(a-b)(a-c)(b-c)).$$

Sobram assim só as 3 permutações pares para eventual definição de $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}(a,b,c)$. Não é difícil ver que todas elas definem de facto $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}(a,b,c)$, pelo que $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q}) \cong \mathcal{A}_3$. Esta conclusão também se pode tirar do seguinte: como, pelo Teorema 3.21, se tem $|Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}]$, bastará mostrar que $[\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}] \geq 3$, o que é simples:

$$[\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}(a)][\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] \geq 3,$$

pois $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = gr(f(x)) = 3$.

(d) Neste caso, se $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, já $\Phi(\sqrt{D})$ não precisa de ser igual a $\sqrt{D}$, e as permutações ímpares também definem elementos de $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})$. Consequentemente, $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$.

3.44. (a) *Sejam $p \geq 5$ um número primo, e $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio irredutível de grau p. Mostre que se $f(x)$ tem exactamente duas raízes complexas não reais, então $Gal(f(x),\mathbb{Q})$ é o grupo simétrico $\mathcal{S}_p$ e portanto $f(x)$ não é resolúvel por radicais.*

Basta fazer o mesmo que na demonstração do Corolário 3.29 (Teorema de Abel-Ruffini).

3.45. *Mostre que os seguintes polinómios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ não são resolúveis por radicais:*

(a) $2x^5 - 10x + 5$.

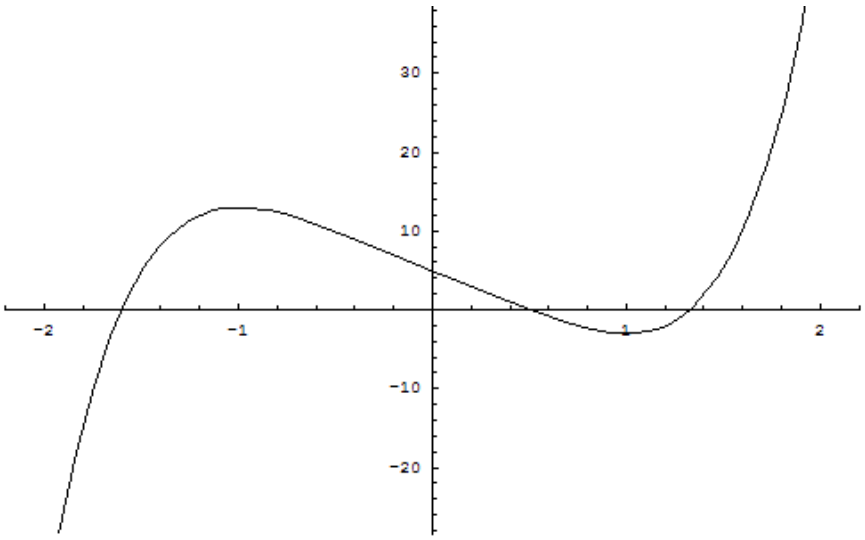
(b) $2x^5 - 5x^4 + 20$.

(c) $x^5 - 6x^2 + 5$.

(d) $x^7 - 10x^5 + 15x + 5$.

Fazendo o estudo e esboço das respectivas funções (ou, alternativamente, usando métodos da Matemática Numérica para localização de raízes, ou utilizando algum software como o Mathematica ou Maple) não é difícil confirmar que:

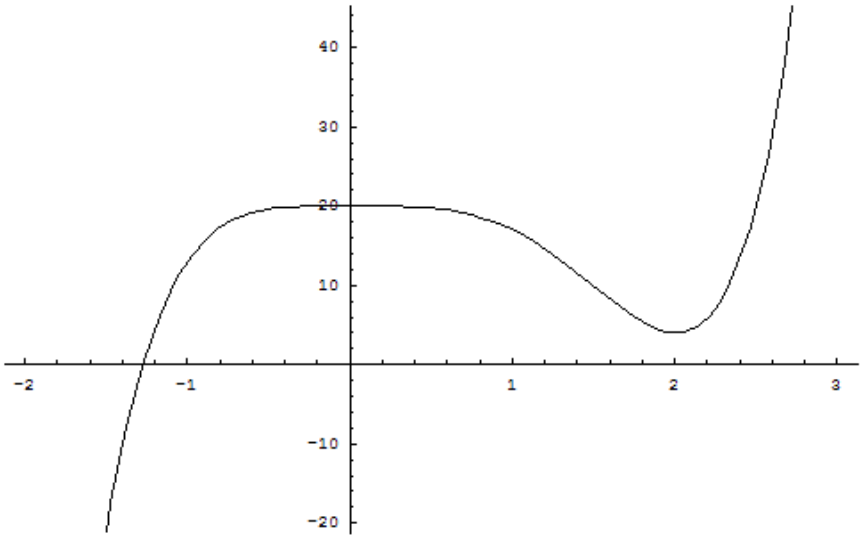
(a) Este polinómio tem exactamente 2 raízes complexas não reais:



$$2x^5 - 10x + 5$$

A conclusão segue do Exercício 3.44 (a).

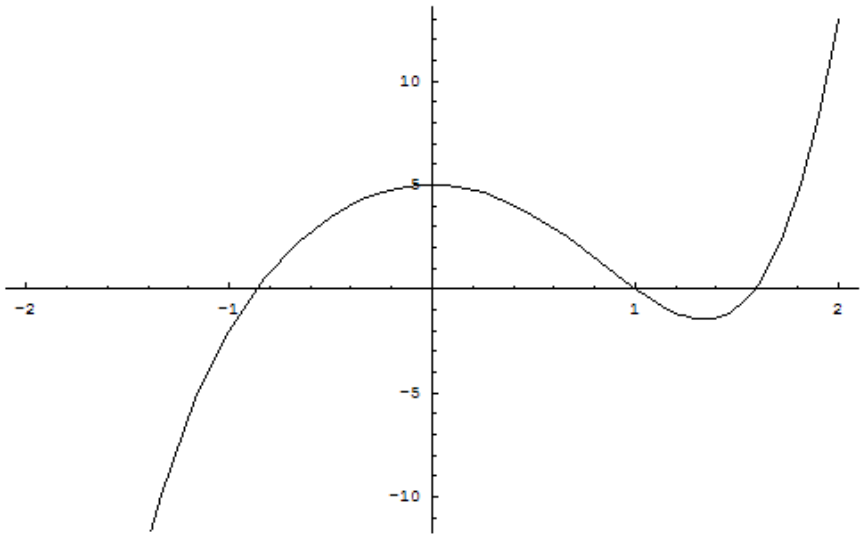
(b) Este polinómio tem exactamente 4 raízes complexas não reais:



$$2x^5 - 5x^4 + 20$$

A conclusão segue do Exercício 3.44 (b).

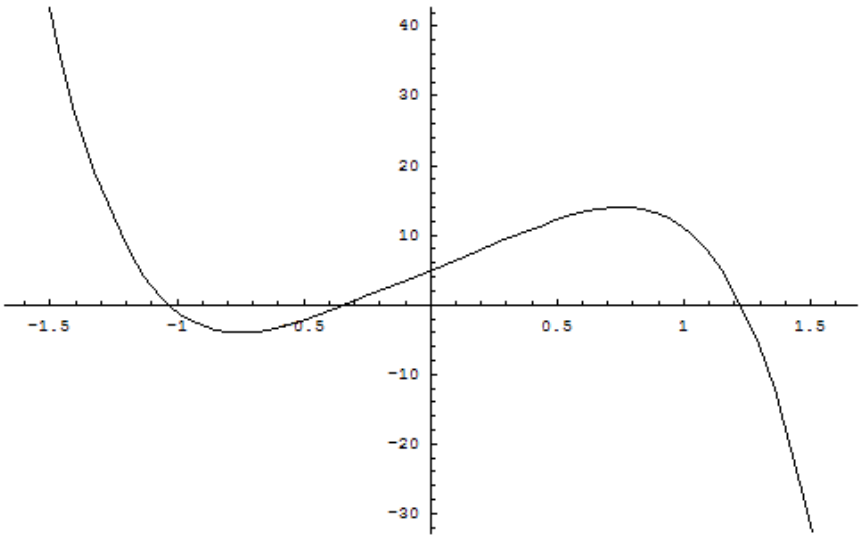
(c) Tem exactamente 2 raízes complexas não reais:



$$x^5 - 6x^2 + 5$$

A conclusão segue do Exercício 3.44 (a).

(d) Tem exactamente 2 raízes complexas não reais:



$$x^7 - 10x^5 + 15x + 5$$

A conclusão segue do Exercício 3.44 (a).

Capítulo 4

4.3. *Seja F a extensão de decomposição de $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.*

(a) Descreva o corpo F e indique um gerador de $F^* = F \setminus \{0\}$.

(b) Qual é o subcorpo primo de F?

(a) F é o corpo

$$\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^2 - 2\rangle} = \{a_0 + a_1 x + \langle x^2 - 2\rangle \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_3\}.$$

Denotando o elemento $a_0 + a_1 x + \langle x^2 - 2\rangle$ por $a_0 a_1$, as tabelas das operações de F são as seguintes:

$+$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
00	00	01	02	10	11	12	20	21	22
01	01	02	00	11	12	10	21	22	20
02	02	00	01	12	10	11	22	20	21
10	10	11	12	20	21	22	00	01	02
11	11	12	10	21	22	20	01	02	00
12	12	10	11	22	20	21	02	00	01
20	20	21	22	00	01	02	10	11	12
21	21	22	20	01	02	00	11	12	10
22	22	20	21	02	00	01	12	10	11

$\cdot$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	20	10	01	21	11	02	22	12
02	00	10	20	02	12	22	01	11	21
10	00	01	02	10	11	12	20	21	22
11	00	21	12	11	02	20	22	10	01
12	00	11	22	12	20	01	21	02	10
20	00	02	01	20	22	21	10	12	11
21	00	22	11	21	10	02	12	01	20
22	00	12	21	22	01	10	11	20	02

O elemento 11 é um exemplo de gerador de F^*.

(b) $\{00, 10, 20\} \cong \mathbb{F}_3$.

4.6. *Construa um corpo finito de ordem 16 e determine todos os geradores do seu grupo multiplicativo.*

Recorde a construção do corpo M nas páginas 88-91. A lista dos elementos primitivos de M é c, f, g, h, i, j, l, n.

4.7. *Construa um corpo com 27 elementos.*

Uma vez que $27 = 3\times3\times3$, pelo processo de construção usado no exercício anterior (baseado no Teorema de Kronecker), teremos que começar com um polinómio de grau 3 irredutível sobre $\mathbb{F}_3$. Por exemplo, o polinómio $p(x) = x^3 + 2x + 1$. Seja L o corpo

$$\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle p(x)\rangle} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \langle p(x)\rangle \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3\}$$

constituído pelas 27 classes definidas pelos restos da divisão dos polinómios de coeficientes em $\mathbb{Z}_3[x]$ por $p(x)$. Este corpo terá exactamente 27 elementos. Com um pouco de paciência não será difícil escrever as tabelas das operações de L.

4.8. *Indique, justificando, o número de corpos não isomorfos de ordem inferior a* 100.

Pelos Teoremas 4.1, 4.3 e 4.4 a lista de corpos não isomorfos de ordem inferior a 100 é a seguinte:

$$\mathbb{F}_{p^n} \ : \ p \text{ primo}, n \in \mathbb{N},\ p^n < 100.$$

Portanto, o seu número é dado pelo número de potências de primos, inferiores a 100, ou seja 34:

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 5, 5^2, 7, 7^2$$
$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

4.10. *Liste os subcorpos do corpo $\mathbb{F}_{256}$. Qual deles é o subcorpo primo?*

Basta usarmos o Teorema 4.5. Como $256 = 2^8$, a lista de subcorpos de $\mathbb{F}_{256}$ é $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_{16}$, $\mathbb{F}_{256}$. $\mathbb{F}_2$ é o subcorpo primo.

4.11. *Usando resultados sobre corpos finitos, mostre que se p é um número primo e r divide n, então $p^r - 1$ divide $p^n - 1$.*

Se p é um número primo e r divide n, então $\mathbb{F}_{p^r}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}_{p^n}$. Em particular,

$$(\mathbb{F}_{p^r})^* = (\mathbb{F}_{p^r} \setminus \{0\}, \cdot)$$

é um subgrupo de

$$(\mathbb{F}_{p^n})^* = (\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}, \cdot)$$

pelo que $|(\mathbb{F}_{p^r})^*| = p^r - 1$ divide $|(\mathbb{F}_{p^n})^*| = p^n - 1$.

4.12. *Determine o número de elementos do corpo* $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$.

Uma vez que

$$\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle = \{p(x) + \langle x^2+1\rangle \mid gr(p(x)) \leq 1\}$$

e existem precisamente $11 \times 11 = 121$ polinómios de grau menor que 2 em $\mathbb{F}_{11}[x]$, o corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$ tem 121 elementos.

4.13. *Mostre que:*

(a) O corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+x+4\rangle$ *é isomorfo a* $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$.

(b) A soma de todos os elementos de um corpo finito, com a excepção de $\mathbb{F}_2$*, é 0.*

(a) Como vimos no exercício anterior, o corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$ tem 121 elementos. Mas o corpo $\mathbb{F}_{11}[x]/\langle x^2+x+4\rangle$ também tem 121 elementos, logo são necessariamente isomorfos (a $\mathbb{F}_{121} = \mathbb{F}_{11^2}$), pelo Teorema de Moore (Corolário 4.3).

(b) Qualquer corpo finito tem sempre um número de elementos igual a uma potência p^n de um primo p, e esse corpo é isomorfo a $\mathbb{F}_p[x]/\langle r(x)\rangle$ para qualquer polinómio $r(x)$ de grau n irredutível sobre $\mathbb{F}_p$. Os seus elementos são então as classes laterais $p(x) + \langle r(x)\rangle$ definidas pelos polinómios $p(x)$ de grau inferior a n:

Grau					
0:	0	1	$\cdots$	$p-2$	$p-1$
1:	x	$x+1$	$\cdots$	$x+p-2$	$x+p-1$
	$2x$	$2x+1$	$\cdots$	$2x+p-2$	$2x+p-1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$(p-2)x$	$(p-2)x+1$	$\cdots$	$(p-2)x+p-2$	$(p-2)x+p-1$
	$(p-1)x$	$(p-1)x+1$	$\cdots$	$(p-1)x+p-2$	$(p-1)x+p-1$
2:	x^2	x^2+1	$\cdots$	x^2+p-2	x^2+p-1
	x^2+x	x^2+x+1	$\cdots$	$x^2+x+p-2$	$x^2+x+p-1$
	x^2+2x	x^2+2x+1	$\cdots$	$x^2+2x+p-2$	$x^2+2x+p-1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$x^2+(p-2)x$	$x^2+(p-2)x+1$	$\cdots$	$x^2+(p-2)x+p-2$	$x^2+(p-2)x+p-1$
	$x^2+(p-1)x$	$x^2+(p-1)x+1$	$\cdots$	$x^2+(p-1)x+p-2$	$x^2+(p-1)x+p-1$
	$2x^2$	$2x^2+1$	$\cdots$	$2x^2+p-2$	$2x^2+p-1$
	$2x^2+x$	$2x^2+x+1$	$\cdots$	$2x^2+x+p-2$	$2x^2+x+p-1$
	$2x^2+2x$	$2x^2+2x+1$	$\cdots$	$2x^2+2x+p-2$	$2x^2+2x+p-1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$2x^2+(p-2)x$	$2x^2+(p-2)x+1$	$\cdots$	$2x^2+(p-2)x+p-2$	$2x^2+(p-2)x+p-1$
	$2x^2+(p-1)x$	$2x^2+(p-1)x+1$	$\cdots$	$2x^2+(p-1)x+p-2$	$2x^2+(p-1)x+p-1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n-1:	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Não vale a pena listar mais polinómios pois já dá para observar o seguinte:

Caso 1: $p > 2$: Neste caso p é ímpar, logo a soma (em $\mathbb{F}_p[x]$) dos polinómios em cada linha é sempre igual a 0 pois, como p é ímpar, $1+2+\cdots+p-2+p-1$ é igual a

$$(1+p-1)+(2+p-2)+\cdots+(\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}) = p+p+\cdots+p = 0.$$

Portanto, a soma das respectivas classes em $\mathbb{F}_p[x]/\langle r(x)\rangle$ dá também 0.

Caso 2: $p = 2$, $n > 1$: Neste caso a lista de polinómios reduz-se a

Grau		
0:	0	1
1:	x	$x+1$
2:	x^2	x^2+1
	x^2+x	x^2+x+1
3:	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1:	x^{n-1}	$x^{n-1}+1$
	$x^{n-1}+x$	$x^{n-1}+x+1$
	$x^{n-1}+x^2$	$x^{n-1}+x^2+1$
	$\vdots$	$\vdots$

Agora a soma em cada linha não é 0 mas sim 1. Mas, como o número total de linhas é par (pois o número de polinómios de grau p^{n-1} é igual ao número de polinómios de grau menor que $n-1$), a soma total continua a dar 0. Portanto, a soma das respectivas classes em $\mathbb{F}_p[x]/\langle r(x)\rangle$ é também igual a 0.

4.15. *Através de um comando à distância de uma televisão podem ser efectuadas 20 operações: escolher entre 18 canais diferentes (0–17), aumentar (*A*) ou diminuir (*D*) o volume. A tabela indica três códigos decimais para transmitir essa informação.*

	0	1	2	$\cdots$	9	10	11	$\cdots$	17	A	D
C_1	00	01	02	$\cdots$	09	10	11	$\cdots$	17	18	19
C_2	0000	0101	0202	$\cdots$	0909	1010	1111	$\cdots$	1717	1818	1919
C_3	00000	01011	02022	$\cdots$	09099	10109	11118	$\cdots$	17172	18181	19190

(a) Determine a distância mínima de cada um dos três códigos.

(b) Diga quais dos códigos detectam e/ou corrigem erros singulares.

(c) Um receptor de televisão recebe informação do comando utilizando o terceiro código. Sempre que possível diga o efeito gerado pela recepção das seguintes mensagens: 15154, 13144, 19191.

(a) $\delta(C_1) = 1$, $\delta(C_2) = 2$ e $\delta(C_3) = 3$.

(b) O código C_2 detecta, mas não corrige, erros singulares, enquanto C_3 detecta e corrige erros singulares.

(c) A palavra 15154 pertence a C_3 pelo que o receptor efectua a operação correspondente: muda para o canal 15.

A palavra 13144 não pertence a C_3 pelo que o receptor detecta o erro; no entanto, não realiza nenhuma operação pois não tem capacidade para o corrigir, uma vez que se trata de um erro duplo: $d(13144, c) > 1$ para qualquer $c \in C_3$, havendo mais do que uma palavra a distância 2 de 13144 (nomeadamente, as palavras 13136, 14145 e 15154).

A palavra 19191 não pertence a C_3 pelo que o receptor detecta o erro; como $d(19190, 19191) = 1$, esse erro é singular e a mensagem correcta é 19190, correspondente à operação D (diminuir o volume).

4.16. *Seja $\mathcal{C}$ o código $(7,3)$-linear binário definido pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Qual é o número de palavras de $\mathcal{C}$?

(b) Calcule a distância mínima $\delta(\mathcal{C})$. Poderá $\mathcal{C}$ detectar erros singulares? E corrigir?

(c) Corrija, caso tal seja possível, os erros nas seguintes mensagens: 0001000, 1011110.

(a) Trata-se de um código sobre $\mathbb{F}_2$ com palavras de comprimento 7, com 4 dígitos de controle. Assim, $\mathcal{C}$ contém $|\mathbb{F}_2^3| = 8$ palavras: 0000000, 0010101, 0101110, 1001111, 1100001, 1011010, 0111011, 1110100.

(b) $\delta(\mathcal{C}) = 3$. Corrige erros singulares.

(c) A palavra correcta correspondente à mensagem 0001000 é 0000000, enquanto que a palavra correcta correspondente à mensagem 1011110 é 1011010.

4.19. *As matrizes H_1, H_2 e H_3 seguintes determinam três códigos lineares binários.*

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada um desses códigos, responda às seguintes questões:

(a) Determine o comprimento do código e o número de dígitos de controlo.

(b) Calcule a distância mínima e descreva o conjunto das mensagens.

(c) Poderão estes códigos ser usados para detectar e/ou corrigir erros singulares?

(d) Supondo que os três últimos dígitos da mensagem são 011, diga se esta mensagem pode pertencer ao código e determine a mensagem completa.

(a) H_1 e H_2 definem códigos (5,2)-lineares enquanto H_3 define um código (7,3)-linear. Portanto, nos dois primeiros casos o comprimento é 5 e há 3 dígitos de controle, enquanto que no segundo o comprimento é 7 e tem 4 dígitos de controle.

(b) (*solução para H_2*) A distância mínima é 3. Uma palavra $c = x_1x_2x_3x_4x_5$ faz parte do código se e só se $H_2c^T = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_4 + x_5 \\ x_3 = x_4 + x_5. \end{cases}$$

Portanto, as mensagens são da forma

$$(x_5, x_4 + x_5, x_4 + x_5, x_4, x_5) = x_4(0,1,1,1,0) + x_5(1,1,1,0,1)$$

com $x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_2$ (isto é, o conjunto das mensagens é o subespaço vectorial de $\mathbb{Z}_2^5$ gerado pelos vectores $(0,1,1,1,0)$ e $(1,1,1,0,1)$). O código é pois formado por 4 mensagens: $(0,0,0,0,0)$, $(0,1,1,1,0)$, $(1,1,1,0,1)$, $(1,0,0,1,1)$.

(c) (*solução para H_2*) Sim, detecta e corrige erros singulares.

(d) (*solução para H_2*) Sim: $(1,0,0,1,1)$.

Bibliografia

[1] E. Artin, *Galois Theory*, Dover, 1998.

[2] R. L. Fernandes e M. Ricou, *Introdução à Álgebra*, IST Press, 2004.

[3] William J. Gilbert, *Modern Algebra with Applications*, Wiley, 1976.

[4] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] C.H. Hadlock, *Field Theory and Its Classical Problems*, The Carus Mathematical Monographs, 19, The Mathematical Association of America, 2000.

[6] A. Hefez e M. L. Villela, *Códigos Correctores de Erros*, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[7] John M. Howie, *Fields and Galois Theory*, Springer, 2006.

[8] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1980.

[9] A. Jones, S. Morris e K. Pearson, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Universitext, Springer-Verlag, 1994.

[10] R. Lidl e H. Niederreiter, *Introduction to Finite Fields and their Applications*, Cambridge University Press, 2000.

[11] J. Picado e M. Sobral, *Álgebra*, Textos de Apoio, Universidade de Coimbra, 2000.

[12] I. Stewart, *Galois Theory*, Chapman & Hall, 1973 (3a ed. 2004).