Duração: 2h30m **Exame (época normal)** 19/06/09

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

---

1. Determine:
   (a) O menor subanel de $\mathbb{Z}$ que contém $\{6, 8\}$.
   (b) O máximo divisor comum de $x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14$ e $x^3 - x^2 - 7x + 7$ em $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) Quais dos seguintes polinómios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:
   $$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = 4x^3 - 3x - \tfrac{1}{2}.$$
2. Num anel com identidade
   (a) a soma de dois divisores de zero é sempre um divisor de zero?
   (b) a soma de dois elementos invertíveis é sempre invertível?
   (c) a identidade pode pertencer a algum ideal próprio?
3. Seja D um domínio de integridade e $a \in D$. Mostre que:
   (a) a é raiz de $f(x) \in D[x]$ se e só se $(x - a) \mid f(x)$.
   (b) $f(x) \in D[x]$ de grau n tem no máximo n raízes em D.
   (c) A afirmação da alínea anterior é falsa para anéis arbitrários.
4. Considere o ideal $I = \langle x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14, x^3 - x^2 - 7x + 7\rangle$ de $\mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine um polinómio $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $I = \langle h(x)\rangle$.
   (b) Diga, justificando, se I é maximal.
   (c) Será que o elemento $x + I$ de $\mathbb{Q}[x]/I$ tem inverso? Em caso afirmativo, determine-o.
5. Determine:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
   (b) O grupo de Galois do polinómio $x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (c) $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) : \mathbb{Q}]$.
6. Seja A um anel com identidade no qual, para todo o elemento $a \in A$, $a^2 = a$. Mostre que:
   (a) $-a = a$, para qualquer $a \in A$.
   (b) A é comutativo.
   (c) São equivalentes, para I ideal não nulo de A, as seguintes afirmações:
   (i) I é primo. (ii) $A/I \cong \mathbb{Z}_2$. (iii) I é maximal.
