Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame (época de recurso)** 21/06/2018

Justifique as suas respostas e indique os principais cálculos (*com excepção da questão 1*)

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(a) $\mathbb{N}$ é um subanel de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.		
(b) O resto da divisão de $x^{100} + 3x + 1$ por $x + 1$ é igual a -1.		
(c) A raiz real de $x^5 - 2x^3 + 4x + 2$ é construtível a partir dos racionais.		

2. Determine:

   (a) A factorização de $x^{10} + 3x^5 - \frac{9}{5}x^3 + 27x^2 + 3$ em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) O máximo divisor comum de $x^2 + x + 1$ e $x^4 + x^3 + 1$ em $\mathbb{Z}_3[x]$.

3. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo.

   (a) Quando é que $(A, +, \cdot)$ se diz um domínio de integridade? E um corpo?

   (b) Dados dois ideais I e J de A, seja $I : J = \{x \in A \mid xJ \subseteq I\}$. Mostre que $I : J$ é um ideal de A.

   (c) No caso do anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e os seus ideias $2\mathbb{Z}$ e $4\mathbb{Z}$, determine $2\mathbb{Z} : 4\mathbb{Z}$ e $4\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}$.

4. Determine:

   (a) O polinómio mínimo de $\sqrt{1 + 3i}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) O corpo de decomposição do polinómio $p(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (c) A dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   (d) A dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

5. (a) Quando é que se diz que um ideal I de um anel A é maximal?

   (b) Seja K um corpo e $p(x) \in K[x]$. Prove que $\langle p(x) \rangle$ é maximal se e só se $p(x)$ é irredutível.

   (c) Considere uma extensão L de K de grau 5. Mostre que $K(\theta) = K(\theta^2)$, para qualquer $\theta \in L$.