Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame (época de recurso)** 21/06/2019

Justifique as suas respostas e indique os principais cálculos (*com excepção da questão 1*)

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações.
   Cada resposta errada vale $-1/2\,c$, sendo c a cotação da alínea.

	V	F
(a) $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero do anel $\mathbb{Z}_{16}[x]$.		
(b) O resto da divisão de $x^{100} + 3x + 1$ por $x + 1$, em $\mathbb{Q}[x]$, é igual a -1.		
(c) $x^5 + 2x^3 + \frac{8}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{2}{7}$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.		

2. Indique, justificando, se:
   (a) $(-1)^n x^n + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots + x^2 - x + 1$ tem raízes racionais.
   (b) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}\,i)$.
   (c) $\sqrt{18} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (d) $\mathbb{Q}(2 + \sqrt[3]{4}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
   (e) $x^3 - 3x + 3$ é irredutível em $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})[x]$.

3. Considere o polinómio $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$. Determine:
   (a) A factorização de $p(x)$ em factores irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) A extensão de decomposição de $p(x)$.
   (c) O grupo de Galois de $p(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Sejam A um anel comutativo, D um domínio de integridade e $f\colon A \to D$ um homomorfismo de anéis. Prove que:
   (a) $\mathrm{Nuc}(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ é um ideal primo de A.
   (b) Se A for um corpo e f não for a aplicação nula (isto é, $f(a) \neq 0$ para algum $a \in A$), então:
      (i) f é necessariamente injectiva.
      (ii) $f(1) = 1$.

5. Responda a <u>uma</u> das seguintes questões:
   (a) Prove que todo o domínio de integridade finito é um corpo.
   (b) Seja C um corpo. Prove que todo o ideal de $C[x]$ é principal.
   (c) Seja C um corpo. Prove que $p(x) \in C[x]$ é irredutível se e só se o ideal $\langle p(x) \rangle$ é maximal.