Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h30m **1ª Frequência** 25/03/2019

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. (a) Indique, para cada um dos seguintes polinómios, se são ou não irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$:

$$6x+6, \quad x^2+4, \quad x^3+1.$$

   (b) Indique, para cada um dos seguintes polinómios, se são ou não irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$:

$$5x^5-6x^4-3x^2+9x-15, \quad 3x^5-4x^3-6x^2+6, \quad x^3+1.$$

   (c) Indique, para cada um dos seguintes polinómios, se são ou não irredutíveis em $\mathbb{Z}[x]$:

$$2x^2+2, \quad x^2-1.$$

2. Seja $p(x) = x^5-6x^4+15x^3-20x^2+14x-4 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Sabendo que $1+i$ é raiz de $p(x)$, determine a factorização de $p(x)$ em factores irredutíveis de $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Enumere os divisores (a menos de associados) de $p(x)$ em $\mathbb{Q}[x]$.

3. Considere o ideal $I = \langle x^3+x+1\rangle$ no anel $A = \mathbb{Z}_2[x]$.
   (a) Quantos elementos tem A/I? Enumere-os, representando cada $p(x)+I$ simplesmente por $p(x)$.
   (b) A/I é um corpo?
   (c) Determine o inverso de x^2+x em A/I.

4. (a) Seja C um corpo. Prove que todo o ideal de $C[x]$ é principal.
   (b) No caso $C=\mathbb{Q}$, determine $m(x)$ tal que $\langle x^2-2x+1\ ,\ x^3-6x^2+11x-6\rangle = \langle m(x)\rangle$.