Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h30m **2ª Frequência** 3/06/2019

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Seja α uma raiz do polinómio $x^4 - 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine:
   (a) A dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\alpha)$ de $\mathbb{Q}$.
   (b) $\dfrac{\alpha + 2}{\alpha^2 + 2}$ em $\mathbb{Q}(\alpha)$.

2. Indique, justificando, se:
   (a) $x^3 - 3x + 3$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (b) $\sqrt{18} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (c) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}\, i)$.

3. Seja θ uma raiz de $p(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ na sua extensão de decomposição.
   (a) Determine a extensão $\mathbb{Z}_2(\theta)$.
   (b) Mostre que $\Phi\colon \mathbb{Z}_2(\theta) \to \mathbb{Z}_2(\theta)$, definida por
   $$\Phi(a + b\theta) = a + b + b\theta,$$
   é um $\mathbb{Z}_2$-automorfismo de $\mathbb{Z}_2(\theta)$.
   (c) Determine o grupo de Galois de $p(x)$ sobre $\mathbb{Z}_2$.
   (d) Determine o polinómio mínimo de $\Phi(\theta)$ sobre $\mathbb{Z}_2$.

4. Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ tal que $[K\colon \mathbb{Q}] = 2$. Mostre que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ para algum $a \in \mathbb{Q}$.