DMUC **Teste de Corpos e Equações Algébricas [A]**

Duração: 1h | *Justifique convenientemente as suas respostas* | 25/02/2019

---

1. Qual é o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes? Justifique convenientemente.

   (a) Num anel A arbitrário e $a \in A \setminus \{0\}$,

   $$a \text{ não é um divisor de zero à esquerda} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, b, c \in A\ [ab = ac \Rightarrow b = c].$$

   (b) Num anel A com identidade e $a \in A \setminus \{0\}$,

   $$a \text{ não é divisor de zero} \quad \Rightarrow \quad a \text{ é invertível.}$$

   (c) Num anel A arbitrário,

   $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ para quaisquer } a, b \in A.$$

2. Considere o anel $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ dos inteiros módulo 6 e seja $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ o anel

   $$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$$

   com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:

   $$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, a_3 \oplus b_3),$$

   $$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3)$$

   (a) Qual é a identidade de $\mathcal{A}$? Calcule o inverso do elemento $(1, 5, 1)$.

   (b) Quais são os restantes elementos invertíveis de $\mathcal{A}$? Quantos são ao todo?

   (c) Determine os divisores de zero de $\mathcal{A}$. Quantos são ao todo?

   (d) Para cada par $(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, considere o conjunto

   $$\mathcal{S}_{(x,y)} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{A} \mid a_1 = x, a_3 = y\}.$$

   Para que valores únicos de x e y é que $\mathcal{S}_{(x,y)}$ é um subanel de $\mathcal{A}$?

   (e) Mostre que, para esses valores de x e y, $\mathcal{S}_{(x,y)}$ é um ideal. É primo? É maximal?

   (f) (Denote o ideal da alínea anterior por I.) Descreva o anel quociente $\mathcal{A}/I$. Quantos elementos tem? É um domínio?

   (g) Exiba um ideal maximal J de $\mathcal{A}$ que contenha I.