Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h15m **Frequência - Exame (parte 1)** 1/06/2020

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Determine:

   (a) Os factores irredutíveis do polinómio $q(x) = x^4 - x^2 - 2$ em $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta)$ para cada uma das raízes $\theta \in \mathbb{C}$ de $q(x)$.

   (c) O inverso de $\theta + 1$ em cada uma das extensões da alínea anterior.

2. Considere o polinómio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no corpo $\mathbb{F}_{256}$.
   A identidade 1 é raiz de $p(x)$? Determine todas as raízes de $p(x)$ em $\mathbb{F}_{256}$ e factorize $p(x)$ em factores irredutíveis.

3. Seja $\mathcal{C}$ o código (5,2)-linear sobre $\mathbb{F}_3$, definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine o conjunto das palavras de $\mathcal{C}$.

   (b) Qual é a síndrome da palavra $\mathbf{y} = 1\,1\,0\,0\,1$ de $\mathbb{F}_3^5$?

   (c) Suponha que ao ser-lhe transmitida uma palavra de $\mathcal{C}$ recebeu a palavra $\mathbf{y}$. Supondo que só podem acontecer erros singulares, corrija o erro, indicando a palavra original correcta.

4. Seja K um corpo de característica diferente de 2, e L uma extensão de K tal que $[L : K] = 2$. Mostre que $L = K(\sqrt{\alpha})$ para algum $\alpha \in K$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h15m **Exame (parte 2)** 1/06/2020

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. **Seja** $(A, +, \cdot)$ **um anel arbitrário**.

   (a) Prove que $0 = -0$ (sendo 0 o elemento neutro do grupo $(A, +)$.

   Suponha que A **tem uma identidade 1**.

   (b) A equação $a + x = b$ $(a, b \in A)$ tem exactamente uma solução em A. O que é que pode dizer sobre a equação $ax = b$?

   (c) Seja a um elemento de A tal que $a^2 = a$.
   Mostre que $aAa := \{axa \mid x \in A\}$ é um subanel de A com identidade $a1a = a$.

   Suponha que A **é comutativo**.

   (d) Considere o ideal $R(A) := \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ de A.
   Mostre que $R(A)$ está contido em qualquer ideal primo de A.

   Suponha agora que A **é um domínio de integridade**.

   Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, senão apresente um contra-exemplo:

   (f) $a^2 = 1 \Rightarrow (a = 1 \vee a = -1)$.

   (g) $-1 \neq 1$.

   (h) $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$.

2. Indique, justificando, quais dos seguintes polinómios são irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$:

$$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = x^3 - 3x - \tfrac{1}{2}.$$

3. Indique todos os polinómios irredutíveis de $\mathbb{R}[x]$.