Duração: 1h15m **Exame Especial (parte 1)** 23/07/2020

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_6, \oplus_6, \otimes_6)$.
   (a) Determine, em A, os elementos -2 e 5^{-1}.
   (b) Determine os divisores de zero de A.
   (c) Para que elementos $a \in A$ é válida a *lei do corte*
   $$\forall\, b, c \in A\ (ab = ac \Rightarrow b = c)\,?$$
   (d) Determine os divisores de zero do anel $A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$
   (as operações em $A\times A$ são $(a, b)+(c, d) = (a\oplus_6 c, b\oplus_6 d)$ e $(a, b)\cdot(c, d) = (a\otimes_6 c, b\otimes_6 d)$).

2. Considere o anel
   $$M(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$
   das matrizes 2×2 em $\mathbb{Z}$, com as operações usuais $+$ e $\times$ de adição e multiplicação de matrizes.
   (a) Mostre que $(M(\mathbb{Z}), +)$ é um grupo comutativo.
   (b) Prove que $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(\mathbb{Z}) \ \mid\ a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$ é um ideal de $M(\mathbb{Z})$.
   (c) Defina ideal primo. O ideal P da alínea anterior é primo?
   (d) Determine o anel quociente $M(\mathbb{Z})/P$. Quantos elementos tem?

3. O polinómio $x^4 - 6x^2 + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$? Justifique a sua resposta.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 1h15m **Exame Especial (parte 2)** 23/07/2020

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Seja θ uma raíz do polinómio $x^3 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine a extensão algébrica $\mathbb{Q}(\theta)$.
   (b) Escreva $\dfrac{5\theta^2 - 10}{\theta + 1}$ como combinação linear de uma base de $\mathbb{Q}(\theta)$.

2. Mostre que o código (5,2)-linear ternário (ou seja, sobre $\mathbb{F}_3$) definido pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   detecta erros duplos.

3. Sejam A e B dois anéis arbitrários.
   (a) Quando é que se diz que uma função $f\colon A \to B$ é um homomorfismo de anéis? Mostre que, nesse caso, $f(0_A) = 0_B$.
   (b) Suponha que A e B são domínios de integridade. Prove que necessariamente f é a aplicação nula (isto é, $\{f(a) \mid a \in A\} = \{0_B\}$) ou então $f(1_A) = 1_B$.