

**Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos**

1. Determine:

- (a) Os factores irreduzíveis do polinómio  $q(x) = x^4 - x^2 - 2$  em  $\mathbb{Q}[x]$ .
- (b)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta)$  para cada uma das raízes  $\theta \in \mathbb{C}$  de  $q(x)$ .
- (c) O inverso de  $\theta + 1$  em cada uma das extensões da alínea anterior.

2. Considere o polinómio  $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  no corpo  $\mathbb{F}_{256}$ .

A identidade 1 é raiz de  $p(x)$ ? Determine todas as raízes de  $p(x)$  em  $\mathbb{F}_{256}$  e factorize  $p(x)$  em factores irreduzíveis.

3. Seja  $\mathcal{C}$  o código (5,2)-linear sobre  $\mathbb{F}_3$ , definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine o conjunto das palavras de  $\mathcal{C}$ .
- (b) Qual é a síndrome da palavra  $\mathbf{y} = 11001$  de  $\mathbb{F}_3^5$ ?
- (c) Suponha que ao ser-lhe transmitida uma palavra de  $\mathcal{C}$  recebeu a palavra  $\mathbf{y}$ . Supondo que só podem acontecer erros singulares, corrija o erro, indicando a palavra original correcta.

4. Seja  $K$  um corpo de característica diferente de 2, e  $L$  uma extensão de  $K$  tal que  $[L : K] = 2$ . Mostre que  $L = K(\sqrt{\alpha})$  para algum  $\alpha \in K$ .

---