

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Determine:

- (a) Os factores irreduzíveis do polinómio $q(x) = x^4 - x^2 - 2$ em $\mathbb{Q}[x]$.
- (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta)$ para cada uma das raízes $\theta \in \mathbb{C}$ de $q(x)$.
- (c) O inverso de $\theta + 1$ em cada uma das extensões da alínea anterior.

2. Considere o polinómio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no corpo \mathbb{F}_{256} .

A identidade 1 é raiz de $p(x)$? Determine todas as raízes de $p(x)$ em \mathbb{F}_{256} e factorize $p(x)$ em factores irreduzíveis.

3. Seja \mathcal{C} o código (5,2)-linear sobre \mathbb{F}_3 , definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine o conjunto das palavras de \mathcal{C} .
- (b) Qual é a síndrome da palavra $\mathbf{y} = 11001$ de \mathbb{F}_3^5 ?
- (c) Suponha que ao ser-lhe transmitida uma palavra de \mathcal{C} recebeu a palavra \mathbf{y} . Supondo que só podem acontecer erros singulares, corrija o erro, indicando a palavra original correcta.

4. Seja K um corpo de característica diferente de 2, e L uma extensão de K tal que $[L : K] = 2$. Mostre que $L = K(\sqrt{\alpha})$ para algum $\alpha \in K$.
