DMUC **Teste de Corpos e Equações Algébricas [A]**

Duração: 1h | *Justifique convenientemente as suas respostas* | 2/03/2020

---

1. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel arbitrário. Explique, com todo o pormenor, como se pode provar a partir da definição de anel que, para quaisquer $a, b \in A$,
$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

2. Considere o conjunto $X = \{x, y, z\}$, o anel $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ dos inteiros módulo 5 e o anel $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ das funções
$$f \colon X \to \mathbb{Z}_5$$
com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:
$$\forall\, f, g \in \mathcal{F},\ \ \forall\, a \in X,\quad (f+g)(a) = f(a) \oplus g(a),\quad (f \cdot g)(a) = f(a) \otimes g(a).$$
   (a) Determine os divisores de zero de $\mathcal{F}$. Quantos são ao todo?
   (b) Qual é a identidade de $\mathcal{F}$? Determine os elementos invertíveis de $\mathcal{F}$. Quantos são ao todo?
   (c) Considere o conjunto
   $$\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(x) = f(z) = 0\}.$$
   Mostre que $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{F}$.
   (d) $\mathcal{J}$ é um ideal *primo*?
   (e) Descreva o anel quociente $\mathcal{F}/\mathcal{J}$. Quantos elementos tem? Quantos divisores de zero tem?

3. Considere o anel $\mathbb{Z}_6$ dos inteiros módulo 6.
   (a) Determine o ideal $I = \langle 3 \rangle$. Mostre que se trata de um ideal *maximal* (isto é, o único ideal de $\mathbb{Z}_6$ que contém I estritamente é o próprio $\mathbb{Z}_6$).
   (b) Determine o anel $\mathbb{Z}_6/I$, apresentando as suas tabelas da adição e da multiplicação.