---

1. **Passo 1:** Pela propriedade distributiva, para qualquer $a \in A$ temos $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, o que implica, pela lei do cancelamento válida no grupo $(A, +)$, $\mathbf{0 \cdot a = 0}$. Analogamente, $a \cdot 0 = 0$.

   Passo 2: Então, usando novamente a propriedade distributiva, $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0$. Isto significa que $(-a)b$ é o simétrico de ab em $(A, +)$. Assim, $\mathbf{(-a)b = -(ab)}$. Analogamente, $a(-b) = -(ab)$.

   Passo 3: Finalmente, podemos então concluir que $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab))$. Mas, pela definição de elemento simétrico no grupo $(A, +)$, o simétrico do simétrico de um elemento é o próprio elemento. Logo $-(-(ab)) = ab$ e, consequentemente, $\mathbf{(-a)(-b) = ab}$.

2. Observemos primeiro que uma função $f \colon X \to \mathbb{Z}_5$ é definida pela sequência $(f(x), f(y), f(z))$ das imagens em $\mathbb{Z}_5$ dos seus três elementos do domínio, isto é,

$$f \equiv (f(x), f(y), f(z)) = (a, b, c) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5.$$

   Portanto, podemos olhar para $\mathcal{F}$ como sendo o anel $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, com as operações dadas por $(a, b, c) + (a', b', c') = (a \oplus a', b \oplus b', c \oplus c')$ e $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (a \otimes a', b \otimes b', c \otimes c')$ (são claramente comutativas).

   (a) Um elemento $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é divisor de zero se e só se existe $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ tal que $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (0, 0, 0)$, isto é,

$$(a \otimes a', b \otimes b', c \otimes c') = (0, 0, 0).$$

   Como não há divisores de zero em $\mathbb{Z}_5$, isto é ainda equivalente a

$$(a = 0 \vee a' = 0) \wedge (b = 0 \vee b' = 0) \wedge (c = 0 \vee c' = 0).$$

   Portanto, (a, b, c) é divisor de zero se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e pelo menos uma das coordenadas a, b, c é igual a 0. Em conclusão, (a, b, c) é divisor de zero se tiver necessariamente uma coordenada $\neq 0$ e uma coordenada igual a 0. São 60 ao todo.

   (b) A identidade de $\mathcal{F}$ é evidentemente a sequência $(1, 1, 1)$, uma vez que $(a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = (a, b, c)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$. Como em $\mathbb{Z}_5$ todos os elementos $\neq 0$ são invertíveis, então todas as sequências (a, b, c) de elementos $a, b, c \neq 0$ são invertíveis em $\mathcal{F}$:

$$(a, b, c)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}).$$

   Por exemplo, o inverso de $(1, 2, 4)$ é a sequência $(1, 3, 4)$ pois $1 \otimes 1 = 1$, $2 \times 3 = 1$ e $4 \otimes 4 = 1$. São ao todo $4 \times 4 \times 4 = 64$ (sequências com repetição de comprimento 3 que podemos formar com os números $1, 2, 3, 4$).

   Em conclusão, dos $5^3 = 125$ elementos de $\mathcal{F}$, 64 são invertíveis, 60 são divisores de zero e o $(0, 0, 0)$ não é uma coisa nem outra.

   (c) Observe primeiro que $\mathcal{J} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \mid a = c = 0\} = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{Z}_5\}$ é um conjunto com 5 elementos. Para quaisquer $(x, y, z) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ e $(0, b, 0), (0, b', 0) \in \mathcal{J}$ temos

$$(0, b, 0) - (0, b', 0) = (0, b - b', 0) \in \mathcal{J}$$

e

$$(x,y,z)\cdot(0,b,0)=(0,y\otimes b,0)\in\mathcal{J}.$$

Portanto, $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{F}$.

(d) $\mathcal{J}$ não é primo uma vez que, por exemplo, $(0,1,1)\cdot(1,1,0)=(0,1,0)\in\mathcal{J}$ mas nem $(0,1,1)$ nem $(1,1,0)$ pertencem a $\mathcal{J}$.

(e) Como $\mathcal{J}=\{(0,b,0)\mid b\in\mathbb{Z}_5\}$, então

$$(a,b,c)+\mathcal{J}=(a',b',c')+\mathcal{J}\ \Leftrightarrow\ (a-a',b-b',c-c')\in\mathcal{J}\ \Leftrightarrow\ a=a',c=c'.$$

Assim, o que distingue duas classes laterais $(a,b,c)+\mathcal{J}$ e $(a',b',c')+\mathcal{J}$ é o valor das coordenadas 1 e 3 dos respectivos representantes (a,b,c) e (a',b',c'). É então evidente que $(a,b,c)+\mathcal{J}=(a,0,c)+\mathcal{J}$ para qualquer $b\in\mathbb{Z}_5$. Assim,

$$\mathcal{F}/\mathcal{J}=\{(a,0,c)+\mathcal{J}\mid a,c\in\mathbb{Z}_5\}$$

e aqui já todos os elementos são distintos. As operações deste anel são

$$((a,0,c)+\mathcal{J})+((a',0,c')+\mathcal{J})=(a\oplus a',0,c\oplus c')+\mathcal{J}$$

e

$$((a,0,c)+\mathcal{J})\cdot((a',0,c')+\mathcal{J})=(a\otimes a',0,c\otimes c')+\mathcal{J}.$$

É evidente que se denotarmos cada elemento $(a,0,c)+\mathcal{J}$ simplesmente por (a,c) o que temos aqui é precisamente o anel $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$, que tem 25 elementos e não é um domínio de integridade: analogamente à alínea (a), $(a,b)\neq(0,0)$ é divisor de zero se e só se $a=0$ (e, portanto, $b\neq 0$) ou $b=0$ (e $a\neq 0$). Existem assim 8 divisores de zero.

Observação. Temos aqui outro argumento para justificar a resposta à alínea (d): como $\mathcal{F}/\mathcal{J}$ não é um domínio de integridade, o ideal $\mathcal{J}$ não é primo (pelo teorema estudado nas aulas).

3. (a) $I=\langle 3\rangle=\{x\otimes 3\mid x\in\mathbb{Z}_6\}=\{0,3\}$. A conclusão de que se trata de um ideal maximal segue imediatamente da resposta à alínea seguinte.

Alternativa: (prova a partir da dedinição de ideal maximal) Seja J um ideal de $\mathbb{Z}_6$ que contenha I estritamente. Portanto, além de $0,3$, J contém pelo menos um dos elementos $1,2,4,5$. Por definição de ideal, segue imediatamente que $J=\mathbb{Z}_6$:

- $1\in J\ \Rightarrow\ J=\mathbb{Z}_6$.
- $2\in J\ \Rightarrow\ 1=3-2\in J\ \Rightarrow\ J=\mathbb{Z}_6$.
- $4\in J\ \Rightarrow\ 1=4-3\in J\ \Rightarrow\ J=\mathbb{Z}_6$.
- $5\in J\ \Rightarrow\ 2=5-3\in J\ \Rightarrow\ 1=3-2\in J\ \Rightarrow\ J=\mathbb{Z}_6$.

(b) Duas classes laterais $a+I$ e $b+I$ $(a,b\in\mathbb{Z}_6)$ são iguais se e só se $a-b\in I=\{0,3\}$. Portanto, $0+I=3+I$, $1+I=4+I$ e $2+I=5+I$, pelo que A/I tem exactamente 3 elementos $0+I,1+I$ e $2+I$. Representemo-los por $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$. As tabelas de A/I são então

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Em conclusão, trata-se do anel $\mathbb{Z}_3$ dos inteiros módulo 3. Como se trata de um corpo, decorre daqui que I é maximal.

Observação: Compare a resposta, $\mathbb{Z}_6/\{0,3\}=\mathbb{Z}_3$, com a divisão usual $6/2=3$...