Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame Época Especial** 22/07/2021

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_8, +_8, \times_8)$. Determine:

   (a) Os elementos -2 e 5^{-1} em A.

   (b) Os divisores de zero de A.

   (c) Os divisores de zero do anel $A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

   (as operações em $A \times A$ são $(a, b) + (c, d) = (a +_8 c, b +_8 d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (a \times_8 c, b \times_8 d)$).

   (d) As soluções em $A \times A$ da equação $(2, 5) \cdot (x, y) = (4, 3)$.

2. Mostre que, para quaisquer inteiros a e b, o polinómio $x^3 + (2a + 1)x + (2b + 1)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

3. Seja θ uma raiz não nula do polinómio $x^4 - x^3 + x^2 - 2x \in \mathbb{Q}[x]$. Determine:

   (a) $\dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$

   (exprima o resultado final como combinação linear dos elementos duma base do espaço vectorial $\mathbb{Q}(\theta)$ sobre $\mathbb{Q}$).

   (b) O polinómio mínimo de θ^2 sobre $\mathbb{Q}$.

4. Determine:

   (a) As raízes racionais do polinómio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

   (b) A decomposição de $p(x)$ em factores irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.

   (c) O número de elementos do anel quociente $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$.

   (d) A decomposição de $x^3 + x^2 + x + 1$ em factores irredutíveis sobre o corpo $\mathbb{F}_{256}$.

5. Seja M um ideal próprio de um anel $(A, +, \cdot)$ comutativo, com identidade 1.

   (a) Quando é que se diz que M é maximal?

   (b) Prove que M é maximal se e só se $\forall\, a \in A \setminus M \;\; \exists\, x \in A \, : \, 1 - ax \in M$.

   (c) Mostre, usando a alínea anterior, que todo o ideal maximal é primo.