Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame de Recurso** 23/06/2021

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_6, +_6, \times_6)$.

   (a) Determine os divisores de zero de A.

   (b) Para que elementos $a \in A$ é válida a *lei do corte*

   $$\forall\, b, c \in A\ (ab = ac \Rightarrow b = c)\,?$$

   (c) Determine os divisores de zero do anel $A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

   (as operações em $A \times A$ são $(a, b) + (c, d) = (a +_6 c, b +_6 d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (a \times_6 c, b \times_6 d)$).

2. Seja $B = \mathbb{R}[x]/I$ onde $I = \langle x^2 - 1 \rangle$.

   (a) B é um corpo? Porquê?

   (b) Determine uma fórmula para a multiplicação $(a + bx + I) \cdot (c + dx + I)$ em B.

3. (a) Sabendo que $\pm\sqrt{10}$ são ambas raízes de $p(x) = x^6 - 14x^4 - 2x^3 + 42x^2 + 20x - 20 \in \mathbb{Q}[x]$, determine a factorização irredutível de $p(x)$ em $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Seja θ uma raiz de $p(x)$ diferente de $\pm\sqrt{10}$. Calcule $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ e determine uma base do espaço vectorial $\mathbb{Q}(\theta)$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. (a) Quais são os polinómios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$?

   (b) O que é um corpo algebricamente fechado ?

   (c) π é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\pi^2)$?

   (d) $x^3 - 9x + 6$ é irredutível em $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})[x]$?

5. Sejam K um subcorpo de um corpo L e $\theta \in L$ um elemento algébrico sobre K. Prove que, se $m(x)$ é o polinómio mínimo de θ sobre K e θ não é raiz de $p(x) \in K[x]$, então:

   (a) $p(x)$ não é múltiplo de $m(x)$.

   (b) Existem $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)\ p(x) + b(x)\ m(x) = 1$.

   (c) $p(\theta)^{-1} = a(\theta)$.