---

(1) 2,3 e 4 são os divisores de zero: $2 \times_6 3 = 0 = 4 \times_6 3$. Os restantes elementos não nulos, 1 e 5, são invertíveis: $1 \times_6 1 = 1 = 5 \times_6 5$.

(2) Há muitos exemplos: $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$,.... Se quisermos elementos $x \neq 0$, como a lei do corte é válida para todos os elementos x diferentes de zero que não são divisores de zero, teremos que procurar exemplos para x entre os divisores de zero: $2 \cdot 1 = 2 \cdot 4$, $3 \cdot 2 = 3 \cdot 4$,...

(3) A identidade é o terno $(1, 1, 1)$. O inverso de (1,5,5) é o próprio, por (1): $(1, 5, 5) \cdot (1, 5, 5) = (1, 1, 1)$.

(4) O exemplo da alínea anterior mostra imediatamente que os elementos invertíveis de A são precisamente os ternos (a, b, c) com $a, b, c \in \{1, 5\}$, uma vez que 1 e 5 são os únicos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_6$. São, ao todo, oito:

$$(1, 1, 1),\ (1, 1, 5),\ (1, 5, 1),\ (1, 5, 5),\ (5, 1, 1),\ (5, 1, 5),\ (5, 5, 1),\ (5, 5, 5).$$

(5) $(a_1, a_2, a_3) \in A$, com $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, é um divisor de zero se e só se existe $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ em A tal que $(a, b, c) \cdot (x_{1,2}, x_3) = (0, 0, 0)$. Como $x_i \neq 0$ para pelo menos algum i, então o correspondente a_i, sendo também $\neq 0$, terá que ser um divisor de zero de $\mathbb{Z}_6$, ou seja, $a_i \in \{2, 3, 4\}$.

Assim, $(a_1, a_2, a_3) \in A$, com $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, é um divisor de zero se e só se $a_i \in \{2, 3, 4\}$ para algum i.

Por exemplo, qualquer $(a_1, a_2, 2)$, com $a_1, a_2 \neq 0$, é um divisor de zero: $(a_1, a_2, 2) \cdot (0, 0, 3) = (0, 0, 0)$.

Contemos estes ternos todos, ou seja, as sequências com repetição, de comprimento 3, formadas com os algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nas quais pelo menos um dos algarismos pertence ao conjunto $\{2, 3, 4\}$. Não é fácil fazer a contagem directa, é muito mais simples fazer a contagem indirecta (do conjunto complementar):

Ao todo, existem $5^3 = 125$ sequências com repetição, de comprimento 3, formadas com os algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Destas, aquelas que **não** contêm nenhum elemento de $\{2, 3, 4\}$, ou seja, as que são formadas somente por algarismos de $\{1, 5\}$ são $2^3 = 8$. Portanto, o número requerido é igual a $125 - 8 = 117$.

(6) Como $(0, 0, 0) \in I$, para que I seja um subanel, basta que $(a, b, c) - (a', b', c') \in I$ sempre que $(a, b, c), (a', b', c') \in I$, o que é evidente: $(a, 0, 0) - (a', 0, 0) = (a - a', 0, 0) \in I$.

Sejam $(x, y, z) \in A$ e $(a, 0, 0) \in I$. Então $(x, y, z) \cdot (a, 0, 0) = (x \times_6 a, 0, 0) \in I$, o que mostra que I é também um ideal de A.

Este ideal não é primo uma vez que, por exemplo, para quaisquer $(a, 2, 0), (b, 3, 0)$, se tem $(a, 2, 0) \cdot (b, 3, 0) = (a \times_6 b, 0, 0) \in I$ mas nem $(a, 2, 0)$ nem $(b, 3, 0)$ pertencem a I.

(7) Como

$$(x, y, z)+I = (x', y', z')+I \Leftrightarrow (x, y, z)-(x', y', z') \in I \Leftrightarrow (y-y', z-z') = (0,0) \Leftrightarrow y = y', z = z',$$

então o que distingue duas classes laterais $(x, y, z) + I$ e $(x', y', z') + I$ é o valor das coordenadas 2 e 3 dos respectivos ternos representantes. Assim, para cada par $y, z \in \mathbb{Z}_6$, é evidente que

$$(0, y, z) + I = (1, y, z) + I = (2, y, z) + I = (3, y, z) + I = (4, y, z) + I = (5, y, z) + I$$

e, portanto,

$$(0, y, z) + I, \quad y, z \in \mathbb{Z}_6$$

formam um conjunto representativo de todas as classes laterais. Existem assim $6^2 = 36$ classes distintas.