1. Como $\theta^2 = 1 + \sqrt{3}$ então $\theta^2 - 1 = \sqrt{3}$ e, portanto, $(\theta^2 - 1)^2 = 3$. Assim $\theta^4 - 2\theta^2 - 2 = 0$ pelo que θ é raiz de $x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Este polinómio é irredutivel em $\mathbb{Q}[x]$, pelo critério de Eisenstein (tomando $p = 2$), e é assim o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$.

   O polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ tem grau ≥ 2 uma vez que $\theta \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$:
   $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Q} : \sqrt{1 + \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3} \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2$
   $\Leftrightarrow 1 = a^2 + 3b^2, 1 = 2ab \Leftrightarrow a, b \neq 0, a = \frac{1}{2b}, 1 = \frac{1}{4b^2} + 3b^2 \Rightarrow 4b^2 = 1 + 12b^4$
   $\Leftrightarrow 12b^4 - 4b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow b^2 = \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{24} \notin \mathbb{Q}$, um absurdo!
   Por outro lado, como $\theta^2 = 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, então θ é raiz de

   $$x^2 - (1 + \sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x],$$

   pelo que é este o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

2. (a) Fazendo $y = x^2$, temos

   $$p(x) = y^2 - y - 2 = (y + 1)(y - 2) = (x^2 + 1)(x^2 - 2).$$

   Estes factores são irredutíveis em $\mathbb{Q}$ (uma vez que não têm raízes racioais) pelo que esta é a factorização de $p(x)$ em factores irredutíveis.

   (b) Seja θ uma raiz de $p(x)$. Pelo Teorema da Torre,

   $$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})],$$

   pois $x^2 - 2$ é o polinómio mínimo de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$. Qual é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
   Como θ é raiz de $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2)$ então $\theta = \pm i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ou $\theta = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   No primeiro caso, $x^2 + 1$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pelo que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) : \mathbb{Q}] = 4$ e

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \{a + b\sqrt{2} + c\, i + d\sqrt{2}i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

   No segundo caso,

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

   (c) No caso $\theta = \pm i$, $\theta + 1 = 1 \pm i$, pelo que

   $$(\theta + 1)^{-1} = \frac{1}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)}{(1 \pm i)(1 \mp i)} = \frac{1 \mp i}{1 + 1} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}i.$$

   No caso $\theta = \pm\sqrt{2}$, $\theta + 1 = 1 \pm \sqrt{2}$, pelo que

   $$(\theta + 1)^{-1} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2}} = \frac{(1 \mp \sqrt{2})}{(1 \pm \sqrt{2})(1 \mp \sqrt{2})} = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{1 - 2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$