Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Corpos e Equações Algébricas 2022/23 | Folha de Exercícios (Capítulo 2)

---

1. Determine o produto dos polinómios $f(x)$ e $g(x)$ do anel $A[x]$, sendo:
   (a) $f(x) = 2x^5 + 1$, $g(x) = 2x^5 + 1$ e $A = \mathbb{Z}_4$.
   (b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$, $g(x) = 3x - 3$ e $A = \mathbb{Z}_6$.
   (c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 4x - 5$ e $A = \mathbb{Z}_8$.

2. Mostre que:
   (a) Se A é um subanel de um anel B, então $A[x]$ é um subanel de $B[x]$.
   (b) O conjunto dos *polinómios homogéneos* sobre um anel A, $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in A\right\}$, é um ideal de $A[x]$.

3. Sejam D um domínio de integridade e $f(x)$ um elemento não nulo de $D[x]$. Prove que $f(x)$ é invertível se e só se $\mathrm{gr}(f(x)) = 0$ e $f(x)$ for invertível considerado como elemento de D. Conclua que se K for um corpo, então os únicos elementos invertíveis de $K[x]$ são os polinómios de grau zero. Este resultado é válido se D for um anel comutativo qualquer?

4. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ elementos de $K[x]$, determine o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, para:
   (a) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$, $g(x) = x^2$ e $K = \mathbb{Q}$.
   (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x + 2$ e $K = \mathbb{Z}_3$.
   (c) $f(x) = x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$, $g(x) = 2x^3 - 2$ e $K = \mathbb{Z}_7$.

5. Sejam A um anel comutativo com identidade e a um elemento fixo de A. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi_a : & A[x] & \longrightarrow & A \\ & f & \longmapsto & f(a) \end{array},$$

   onde $f(a)$ denota o valor da função polinomial associada a f em a.
   (a) Mostre que ϕ_a é um homomorfismo de anéis.
   (b) Determine o núcleo de ϕ_a.

6. Determine todos os primos ímpares p para os quais $x - 2$ divide $x^4 + x^3 + x^2 + x$ em $\mathbb{Z}_p[x]$.

7. Mostre que se $1 + i$ é raiz de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $p(x)$ é divisível por $x^2 - 2x + 2$ em $\mathbb{R}[x]$.

8. Em cada uma das alíneas seguintes determine, em $\mathbb{R}[x]$, $d(x) = \mathrm{mdc}(f(x), g(x))$ e $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
   (a) $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.
   (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = x^2 + x - 2$.
   (c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 8$ e $g(x) = x^4 - 4$.

9. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ são ideais de $\mathbb{Q}[x]$? (Em caso afirmativo, calcule $p(x)$ mónico tal que $J = \langle p(x) \rangle$.) Quais desses ideais são maximais?

(a) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(7) = 0\}$.

(b) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(2) = 0 \text{ e } f(5) \neq 0\}$.

(c) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\sqrt{3}) = 0\}$.

(d) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(4) = 0 \text{ e } f(0) = f(1)\}$.

10. Averigúe se os ideais $\langle x \rangle$ e $\langle 2, x \rangle$ do domínio $\mathbb{Z}[x]$ são principais, primos ou maximais.

11. Determine $K[x]/\langle f(x) \rangle$ e escreva as respectivas tabelas de anel para:

    (a) $K = \mathbb{Z}_2$ e $f(x) = x$.

    (b) $K = \mathbb{Z}_2$ e $f(x) = x^2 + x + 1$.

    (c) $K = \mathbb{Z}_3$ e $f(x) = x^2 + 2$.

12. Considere o polinómio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Mostre que $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x) \rangle$ é um corpo e descreva os seus elementos. Qual é o cardinal deste corpo?

13. Sendo K um corpo, prove que se $f(x) \in K[x]$ é de grau 2 ou 3 e não tem raízes em K então $f(x)$ é irredutível sobre K. Mostre que a recíproca é válida para polinómios de grau ≥ 2.

14. Indique, justificando, quais dos seguintes polinómios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:

$$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = 4x^3 - 3x - \tfrac{1}{2}.$$

15. Determine a factorização do polinómio $q(x) = x^4 + x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ em factores irredutíveis.

16. Averigúe quais dos seguintes polinómios de $\mathbb{Z}[x]$ são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$ (em caso negativo, factorize-os como produto de polinómios irredutíveis):

    (a) $x^3 - x + 1$.

    (b) $x^3 - 2x - 1$.

    (c) $x^3 - 2x^2 + x + 15$.

    (d) $x^7 + 11x^3 + 33x + 22$.

    (e) $x^5 + 2$.

    (f) $x^3 + 2x^2 + 10$.

    (g) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$.

17. Determine todas as raízes racionais dos seguintes polinómios em $\mathbb{Q}[x]$:

    (a) $x^{50} - x^{20} + x^{10} - 1$.

    (b) $2x^2 - 3x + 4$.

    (c) $\frac{1}{2}x^3 - 5x + 2$.

    (d) $x^3 - 7x + 3$.

18. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, o polinómio $x^3 + (2a+1)x + (2b+1)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

19. O anel quociente $\mathbb{Q}[x]/\left\langle 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15 \right\rangle$ é um corpo?

20. Para cada um dos seguintes ideais I de $\mathbb{Z}_2[x]$

   (a) $\langle x^3 + x + 1\rangle$

   (b) $\langle x^2\rangle$

   justifique se $\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo. Construa as tabelas de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$.

Exercícios mais avançados

1*. Seja K um corpo. Mostre que se $\varphi : K[x] \to K[x]$ é um isomorfismo tal que $\varphi(a) = a$ para qualquer $a \in K$, então $\varphi(x) = cx + d$ para algum par $c, d \in K$.

2*. Seja K um corpo finito. Mostre que $K[x]$ contém polinómios irredutíveis de grau tão grande quanto se queira. [Sugestão: Imite a prova de Euclides da existência de um número infinito de primos].

3*. Seja K um corpo. Mostre que se $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ é irredutível em $K[x]$, também $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ o é.

4*. Seja A um anel e $c \in A$.

   (a) Mostre que a correspondência $p(x) \mapsto p(x + c)$ define um automorfismo do anel $A[x]$.

   (b) Conclua que se A é um corpo, então $p(x)$ é irredutível em $A[x]$ se e só se $p(x + c)$ é.

5*. Usando o critério de Eisenstein, prove que, se $n > 1$ e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos distintos dois a dois, então $\sqrt[n]{p_1p_2 \ldots p_k}$ é um número irracional. Será indispensável exigir que os números $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sejam todos distintos?

6*. Seja p um inteiro primo. Prove que o *polinómio ciclotómico*

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.