Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

Duração: 2h30m **Exame de Recurso** 27/06/2022

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_8, +_8, \times_8)$. Determine:
   (a) Os elementos -2 e 5^{-1} em A.
   (b) Os divisores de zero de A.
   (c) Os divisores de zero do anel $A \times A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}$
   (as operações em $A \times A$ são $(a,b)+(c,d) = (a +_8 c, b +_8 d)$ e $(a,b) \cdot (c,d) = (a \times_8 c, b \times_8 d)$).
   (d) As soluções em $A \times A$ da equação $(2,5) \cdot (x,y) = (4,3)$.

2. Sendo $I = \langle x^2 + x + 1 \rangle$, considere o anel quociente $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$.
   (a) A é um corpo?
   (b) Determine a tabela da multiplicação em A. Qual é o inverso de $x^3 + I$ em A?
   (c) Este corpo tem 4 elementos. Explique resumidamente como se pode construir um corpo com 27 elementos.

3. Seja θ uma raíz do polinómio $x^3 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine a extensão algébrica $\mathbb{Q}(\theta)$.
   (b) Escreva o elemento $(5\theta^2 - 10)(\theta + 1)^{-1}$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ na forma genérica dos elementos de $\mathbb{Q}(\theta)$ determinada na alínea anterior.

4. Considere o polinómio $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$.
   (a) Determine a factorização de $p(x)$ em factores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Sabendo que $p(x)$ tem pelo menos uma raiz complexa não real, determine a dimensão sobre $\mathbb{Q}$ da extensão de decomposição de $p(x)$.

5. Seja M um ideal próprio de um anel $(A, +, \cdot)$ comutativo, com identidade 1.
   (a) Quando é que se diz que M é maximal?
   (b) Prove que M é maximal se e só se $\forall\, a \in A \setminus M \;\; \exists\, x \in A \,:\, 1 - ax \in M$.
   (c) Mostre, usando a alínea anterior, que todo o ideal maximal é primo.