

1. Averigüe se os seguintes conjuntos têm estrutura de anel para as operações indicadas. Em caso afirmativo, verifique se têm identidade, divisores de zero e estrutura de corpo.

- (a) $(\mathbb{Z}, +, \times)$, sendo $+$ e \times a adição e a multiplicação usuais de números inteiros.
- (b) $(\mathbb{C}, +, \times)$, sendo $+$ e \times a adição e a multiplicação usuais de números complexos.
- (c) $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$, onde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, com n número natural fixo, e \oplus_n e \otimes_n denotam respectivamente a adição e multiplicação módulo n .
- (d) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$, onde $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, com n número natural fixo, é o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos em \mathbb{R} , e $+$ e \times denotam a adição e multiplicação usuais de matrizes, respectivamente.
- (e) $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$, sendo

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

o chamado conjunto dos *inteiros de Gauss* e $+$ e \times a adição e a multiplicação usuais de números complexos.

- (f) (A, \oplus, \otimes) , sendo $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade (que denotamos por 1) e

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad \forall a, b \in A,$$

$$a \otimes b = a + b + a \cdot b, \quad \forall a, b \in A.$$

- (g) $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$, onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de um conjunto não vazio X e

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X).$$

2. Quais das seguintes propriedades são válidas num anel arbitrário A ? E num anel comutativo arbitrário?

- (a) $a^m a^n = a^{m+n}$, $\forall a \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}$.
- (b) $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}$.
- (c) $(ab)^m = a^m b^m$, $\forall a, b \in A, \forall m \in \mathbb{N}$.

3. Sendo A um anel e $a \in A - \{0\}$, prove que

$$a \text{ não é um divisor de zero à esquerda} \Leftrightarrow \forall b, c \in A [ab = ac \Rightarrow b = c].$$

4. Seja A um anel com identidade 1 e não tendo divisores de zero. Para $a, b \in A$ mostre que:

- (a) $ab = 1$ se e só se $ba = 1$.
- (b) Se $a^2 = 1$ então $a = 1$ ou $a = -1$.

5. Um elemento a de um anel A diz-se *idempotente* se $a^2 = a$ e *nilpotente* se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

- (a) Um elemento idempotente diferente de zero não pode ser nilpotente.

- (b) Qualquer elemento nilpotente diferente de zero é um divisor de zero.
6. Sejam a e b dois elementos de um anel comutativo A com identidade. Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$,
- $$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i, \quad \text{onde } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$
7. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:
- (a) Para cada $d \in D - \{0\}$, a aplicação $\phi_d : D \rightarrow D$, definida por $\phi_d(x) = dx$, é injectiva.
- (b) Se D é finito, então D é um corpo.
8. Averigüe quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais dos anéis indicados.
- (a) O conjunto dos inteiros pares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
- (b) O conjunto dos inteiros ímpares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
- (c) O conjunto dos números reais de forma $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, em $(\mathbb{R}, +, \times)$.
- (d) O conjunto dos números complexos da forma ib , com $b \in \mathbb{R}$, em $(\mathbb{C}, +, \times)$.
- (e) O conjunto dos números inteiros em $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
9. Verifique que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um subanel de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$ e que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ tem identidade diferente da identidade de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$.
10. Determine os ideais do anel \mathbb{Z}_n para
- (a) $n = 4$; (b) $n = 11$; (c) $n = 12$; (d) $n = 16$.
11. Chama-se *centro* de um anel A ao conjunto $\{x \in A \mid xa = ax, \forall a \in A\}$. Mostre que o centro de A é um subanel do anel A . Será um ideal?
12. Sejam D um domínio de integridade e a e b elementos de D . Mostre que $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$ e descubra uma condição necessária e suficiente para que $\langle ab \rangle = \langle a \rangle$.
13. (a) Qual é o menor subanel de \mathbb{Z} que contém o 3? E o menor ideal?
- (b) Qual é o menor subanel de \mathbb{R} que contém o $\frac{1}{2}$? E o menor ideal?
14. Considere o anel \mathbb{Z} dos números inteiros. Prove que o ideal gerado por $p \in \mathbb{N} - \{1\}$ é um ideal primo se e só se p é um número primo.
15. Considere no conjunto $C = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ as operações $+$ e \cdot definidas pelas tabelas

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

\cdot	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Prove que $(C, +, \cdot)$ é um corpo e determine todos os seus subcorpos.

16. Considere os ideais $\langle 2 \rangle$, $\langle 4 \rangle$ e $\langle 5 \rangle$ do anel \mathbb{Z} . Determine o anel quociente respectivo e averigüe se se trata de um corpo.

17. Seja A o anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real, onde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

- (a) Determine os divisores de zero de A .
- (b) Mostre que $I = \{f \in A \mid f(5) = 0\}$ é um ideal de A . É primo?
- (c) Determine o anel quociente A/I .

18. Dado um anel $(A, +, \cdot)$, seja $\mathcal{F} = (A^A, +, \cdot)$ o anel das funções $A \rightarrow A$ com a adição e multiplicação definidas do seguinte modo:

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad \forall x \in A \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Para cada $(a, b) \in A \times A$ considere o conjunto $\mathcal{F}_{(a,b)} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = b\}$.

- (a) Prove que $\mathcal{F}_{(a,b)}$ é um subanel de \mathcal{F} se e só se $b = 0$.
 - (b) Mostre que $\mathcal{F}_{(a,0)}$ é um ideal de \mathcal{F} .
 - (c) Prove que o anel quociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{(a,0)}$ é isomorfo a A .
19. (a) Recorde o Exercício 1(g). Mostre que $\mathcal{P}(S)$ é um ideal de $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ para qualquer $S \subseteq X$.
- (b) Determine o anel quociente $\mathcal{P}(X)/\mathcal{P}(S)$ e compare-o com o anel $(\mathcal{P}(X - S), \Delta, \cap)$.
20. Quais das seguintes funções são homomorfismos de anéis?

(a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $a \mapsto a^2$

(b) $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$
 $a \mapsto a^3$

(c) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $a \mapsto 5a$

(d) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$
 $a \mapsto$ resto da divisão de a por n

(e) $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}$
 $a + ib \mapsto a^2 + b^2$, sendo $\mathbb{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss (Exercício 1(e)).

(f) A função $\theta : \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \rightarrow \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, definida por $\theta(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$.

Exercícios mais avançados (com soluções em anexo)

1*. Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = ab/3$.

- (a) Mostre que A é um corpo.
- (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo.

2*. Prove que se A é um anel, I e J são ideais de A e P é um ideal primo de A , então

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ ou } J \subseteq P.$$

(Observação: IJ denota o conjunto $\{ab \mid a \in I, b \in J\}$.)

3*. Seja M um ideal próprio de um anel comutativo com identidade A . Prove que M é maximal se e só se

$$\forall a \in A - M \exists x \in A : 1 - ax \in M.$$

4*. Seja A um anel com identidade no qual todo o elemento a satisfaz $a^2 = a$. Mostre que:

- (a) $-a = a$, para todo o $a \in A$.
- (b) A é comutativo.
- (c) As seguintes condições são equivalentes, para qualquer ideal I de A não nulo:
 - (i) I é primo.
 - (ii) $A/I \cong \mathbb{Z}_2$.
 - (iii) I é maximal.

5*. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Considere o conjunto

$$\mathcal{N}(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}.$$

- (a) Calcule $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{16})$.
- (b) Mostre que:
 - (i) $\mathcal{N}(A)$ é um ideal de A .
 - (ii) Para qualquer ideal primo I de A , $\mathcal{N}(A) \subseteq I$.
 - (iii) $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{\mathcal{N}(A)\}$.

6*. Seja D um domínio de integridade e considere no conjunto $S = D \times (D \setminus \{0\})$ a relação

$$(a, b) \sim (c, d) \equiv ad = bc.$$

- (a) Mostre que \sim é uma relação de equivalência em S .
- (b) Denote a classe de equivalência $\{(c, d) \in S \mid (c, d) \sim (a, b)\}$ por a/b , ou $\frac{a}{b}$, e o conjunto de todas as classes de equivalência $\{a/b \mid (a, b) \in S\}$ por K . Prove que

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd \quad \text{e} \quad a/b \cdot c/d = ac/bd$$

definem operações em K que lhe dão uma estrutura de corpo (o chamado *corpo das frações* ou *quocientes* de D).

- (c) No caso $D = \mathbb{Z}$ que corpo é K ?
- (d) Mostre que $D' = \{a/1 \mid a \in D\}$ é um subanel de K isomorfo a D e que para cada $x \in K$ existem $a, b \in D'$ com $b \neq 0$ tais que $x = ab^{-1}$.
- (e) Prove que K é o menor subcorpo de K que contém D' .

Conclua que o corpo dos quocientes K de um domínio de integridade D é o menor corpo (a menos de isomorfismo) contendo D (no sentido de que não existe nenhum corpo L tal que $D \subset L \subset K$).