

1. Determine o produto dos polinómios $f(x)$ e $g(x)$ do anel $A[x]$, sendo:
 - (a) $f(x) = 2x^5 + 1$, $g(x) = 2x^5 + 1$ e $A = \mathbb{Z}_4$.
 - (b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$, $g(x) = 3x - 3$ e $A = \mathbb{Z}_6$.
 - (c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 4x - 5$ e $A = \mathbb{Z}_8$.
2. Sejam D um domínio de integridade e $f(x)$ um elemento não nulo de $D[x]$. Prove que $f(x)$ é invertível se e só se $\text{gr}(f(x)) = 0$ e $f(x)$ for invertível considerado como elemento de D . Conclua que se K for um corpo, então os únicos elementos invertíveis de $K[x]$ são os polinómios de grau zero. Este resultado é válido se D for um anel comutativo qualquer?
3. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ elementos de $K[x]$, determine o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, para:
 - (a) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$, $g(x) = x^2$ e $K = \mathbb{Q}$.
 - (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x + 2$ e $K = \mathbb{Z}_3$.
 - (c) $f(x) = x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$, $g(x) = 2x^3 - 2$ e $K = \mathbb{Z}_7$.
4. Em cada uma das alíneas seguintes determine, em $\mathbb{R}[x]$, $d(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$ e $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
 - (a) $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.
 - (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = x^2 + x - 2$.
 - (c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 8$ e $g(x) = x^4 - 4$.
5. Determine todos os primos ímpares p para os quais $x - 2$ divide $x^4 + x^3 + x^2 + x$ em $\mathbb{Z}_p[x]$.
6. Mostre que se $1 + i$ é raiz de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $p(x)$ é divisível por $x^2 - 2x + 2$ em $\mathbb{R}[x]$.
7. Sejam A um anel comutativo com identidade e a um elemento fixo de A . Considere a aplicação

$$\phi_a : \begin{array}{ccc} A[x] & \longrightarrow & A \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array},$$
 onde $f(a)$ denota o valor da função polinomial associada a f em a .
 - (a) Mostre que ϕ_a é um homomorfismo de anéis.
 - (b) Determine o núcleo de ϕ_a .
8. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ são ideais de $\mathbb{Q}[x]$? (Em caso afirmativo, calcule $p(x)$ mónico tal que $J = \langle p(x) \rangle$.) Quais desses ideais são maximais?
 - (a) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(7) = 0\}$.
 - (b) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(2) = 0 \text{ e } f(5) \neq 0\}$.
 - (c) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\sqrt{3}) = 0\}$.
 - (d) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(4) = 0 \text{ e } f(0) = f(1)\}$.

9. Averigüe se os ideais $\langle x \rangle$ e $\langle 2, x \rangle$ do domínio $\mathbb{Z}[x]$ são principais, primos ou maximais.
10. Mostre que:
- Se A é um subanel de um anel B , então $A[x]$ é um subanel de $B[x]$.
 - O conjunto dos *polinômios homogêneos* sobre um anel A , $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A \right\}$, é um ideal de $A[x]$.
11. Determine $K[x]/\langle f(x) \rangle$ e escreva as respectivas tabelas de anel para:
- $K = \mathbb{Z}_2$ e $f(x) = x$.
 - $K = \mathbb{Z}_2$ e $f(x) = x^2 + x + 1$.
 - $K = \mathbb{Z}_3$ e $f(x) = x^2 + 2$.
12. Sendo K um corpo, prove que se $f(x) \in K[x]$ é de grau 2 ou 3 e não tem raízes em K então $f(x)$ é irredutível sobre K . Mostre que a recíproca é válida para polinômios de grau ≥ 2 .
13. Determine $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ e escreva as respectivas tabelas de anel.
14. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Mostre que $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x) \rangle$ é um corpo e descreva os seus elementos. Qual é o cardinal deste corpo?
15. Indique, justificando, quais dos seguintes polinômios são irredutíveis sobre \mathbb{Q} :
- $$p(x) = 5x^5 - 10x^3 + 6x^2 - 2x + 6, \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2, \quad r(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$
16. Determine a fatorização do polinômio $q(x) = x^4 + x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ em factores irredutíveis.
17. Averigüe quais dos seguintes polinômios de $\mathbb{Z}[x]$ são irredutíveis sobre \mathbb{Q} (em caso negativo, factorize-os como produto de polinômios irredutíveis):
- $x^3 - x + 1$.
 - $x^3 - 2x - 1$.
 - $x^3 - 2x^2 + x + 15$.
 - $x^7 + 11x^3 + 33x + 22$.
 - $x^5 + 2$.
 - $x^3 + 2x^2 + 10$.
 - $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$.
18. Determine todas as raízes racionais dos seguintes polinômios em $\mathbb{Q}[x]$:
- $x^{50} - x^{20} + x^{10} - 1$.
 - $2x^2 - 3x + 4$.
 - $\frac{1}{2}x^3 - 5x + 2$.
 - $x^3 - 7x + 3$.
19. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, o polinômio $x^3 + (2a + 1)x + (2b + 1)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} .
20. O anel quociente $\mathbb{Q}[x]/\langle 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15 \rangle$ é um corpo?

21. Para cada um dos seguintes ideais I de $\mathbb{Z}_2[x]$

(a) $\langle x^3 + x + 1 \rangle$

(b) $\langle x^2 \rangle$

justifique se $\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo. Construa as tabelas de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$.

Exercícios mais avançados

1*. Seja K um corpo. Mostre que se $\varphi : K[x] \rightarrow K[x]$ é um isomorfismo tal que $\varphi(a) = a$ para qualquer $a \in K$, então $\varphi(x) = cx + d$ para algum par $c, d \in K$.

2*. Seja K um corpo finito. Mostre que $K[x]$ contém polinômios irredutíveis de grau tão grande quanto se queira. [Sugestão: Imita a prova de Euclides da existência de um número infinito de primos].

3*. Seja K um corpo. Mostre que se $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é irredutível em $K[x]$, também $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ o é.

4*. Seja A um anel e $c \in A$.

(a) Mostre que a correspondência $p(x) \mapsto p(x + c)$ define um automorfismo do anel $A[x]$.

(b) Conclua que se A é um corpo, então $p(x)$ é irredutível em $A[x]$ se e só se $p(x + c)$ é.

5*. Usando o critério de Eisenstein, prove que, se $n > 1$ e p_1, p_2, \dots, p_k são números primos distintos dois a dois, então $\sqrt[n]{p_1 p_2 \dots p_k}$ é um número irracional. Será indispensável exigir que os números p_1, p_2, \dots, p_k sejam todos distintos?

6*. Seja p um inteiro primo. Prove que o *polinômio ciclotômico*

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.