Soluções de exercícios

Folha 3

6(b). *Determine o polinómio mínimo sobre* $\mathbb{Q}$ *de* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Seja $\theta = \sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Como $\theta^2 = 8+2\sqrt{15}$ então $(\theta^2-8)^2 = 60$. Assim $\theta^4 - 16\theta^2 + 4 = 0$ pelo que θ é raiz de $x^4 - 16x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Este polinómio é irredutivel em $\mathbb{Q}[x]$ e é assim o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$. De facto:

- Não tem raízes racionais: as únicas possibilidades são ± 1, ± 2, ± 4, nenhuma o é.
- Portanto, a única possibilidade de ser redutível é factorizar-se na forma

$$x^4 - 16x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b').$$

Isto será possível precisamente se o sistema

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + aa' + b' = -16 \\ ab' + a'b = 0 \\ bb' = 4 \end{cases}$$

tiver solução em $\mathbb{Q}$. Resolvendo vem

$$\begin{cases} a' = -a \\ \hline a(b'-b) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b' = b \\ \hline \end{cases}$$

O caso $a = 0$ implica $b + b' = -16$ e $bb' = 4$, ou seja, $b^2 + 16b + 4 = 0$, que não tem raízes racionais. Por outro lado, o caso $b' = b$ implica $b^2 = 4$, ou seja, $b = 2$ ou $b = -2$. Substituindo na segunda equação obtemos

$$-a^2 + 4 = -16 \Leftrightarrow a^2 = 20 \quad \text{ou} \quad -a^2 - 4 = -16 \Leftrightarrow a^2 = 12,$$

ambas impossíveis em $\mathbb{Q}$.

Em conclusão, o sistema é impossível.

10(d). *Determine o inverso de* $\theta^2 - 6\theta + 8$ *na extensão simples* $\mathbb{Q}(\theta)$*, onde* $\theta \neq 0$ *é tal que* $\theta^4 - 6\theta^3 + 9\theta^2 + 3\theta = 0$.

O polinómio $x^4-6x^3+9x^2+3x = x(x^3-6x^2+9x+3)$, do qual θ é raiz, é redutível sobre $\mathbb{Q}$. Como $\theta \neq 0$, então θ é raiz do factor x^3-6x^2+9x+3. Este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein, $p=3$), logo é o polinómio mínimo $m(x)$ de θ sobre $\mathbb{Q}$. Seja $f(x) = x^2-6x+8$. Uma vez que $m(x) = xf(x)+x+3$ e $f(x) = (x-9)(x+3)+35$ (o que confirma que $mdc(m(x), f(x)) = 1$), então

$$35 = f(x) - (x-9)(m(x) - xf(x)) = (x^2-9x+1)f(x) - (x-9)m(x),$$

ou seja,

$$1 = \frac{1}{35}[(x^2-9x+1)f(x) - (x-9)m(x)].$$

Substituindo x por θ obtemos $1 = \frac{1}{35}(\theta^2-9\theta+1)f(\theta)$, o que mostra que

$$(\theta^2-6\theta+8)^{-1} = f(\theta)^{-1} = \frac{1}{35}(\theta^2-9\theta+1).$$

12. *Seja L uma extensão finita de K. Prove que:*

(a) *Se $[L:K]$ é um número primo, então L é uma extensão simples de K.*

(b) *Se $\theta \in L$, então o grau de θ é um divisor de $[L:K]$. Conclua que se tem $L = K(\theta)$ se e só se o grau de θ coincidir com $[L:K]$.*

(c) *Se $f(x) \in K[x]$ é irredutível sobre K e o grau de $f(x)$ é um número primo com $[L:K]$ e maior do que 1, então $f(x)$ não tem raízes em L.*

(a) Se L é uma extensão finita de K todos os seus elementos são algébricos sobre K. Como $[L:K] = p > 1$, existe $\theta \in L \setminus K$. Pelo Teorema da Torre,

$$p = [L:K] = [L:K(\theta)][K(\theta):K]. \tag{1}$$

Como $\theta \notin K$, $[K(\theta):K] > 1$. Mas p é primo, donde só pode ser $[K(\theta):K] = p$ e $[L:K(\theta)] = 1$. Esta última igualdade diz-nos que $L = K(\theta)$, pelo que L é uma extensão simples de K.

(b) Como, por definição, o grau de θ coincide com $[K(\theta):K]$, por (1) este é um divisor de $[L:K]$ e coincide com $[L:K]$ se e só se $[L:K(\theta)] = 1$, ou seja, $L = K(\theta)$.

(c) Suponhamos, por absurdo, que $f(x)$ tinha uma raiz θ em L. Seja $m(x)$ o polinómio mónico associado a $f(x)$. Evidentemente, trata-se do polinómio mínimo de θ sobre K. Portanto, $[K(\theta):K] = gr(f(x))$ seria um número primo com $[L:K]$, o que é absurdo por (1). Logo $f(x)$ não tem raízes em L.

14(e). *Determine o grau sobre* $\mathbb{Q}$ *e uma base da extensão* $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$*, onde* $\alpha^3-\alpha+1=0$ *e* $\beta^2-\beta=1$*.*

Pelo Teorema da Torre,

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}].$$

Como x^3-x+1 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pois não tem raízes racionais), trata-se do polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$ e $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ é uma base desta extensão simples. Portanto, $\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$. Por outro lado, β é raiz do polinómio $f(x)=x^2-x-1$. Será que este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$? Sim, pelo exercício anterior (alínea (c)): $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e o seu grau é um número primo com $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ e maior do que 1, pelo que não tem raízes em $\mathbb{Q}(\alpha)$. Como é de grau 3 será irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)]=2$ e $\{1,\beta\}$ é uma base desta extensão simples. Concluindo, $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]=6$ e $\{1,\alpha,\alpha^2,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta\}$ é uma base da extensão dupla $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ de $\mathbb{Q}$.

16. *Seja* p *um inteiro primo positivo. Determine a dimensão e uma base da extensão* $\mathbb{Q}(\sqrt{p+\sqrt{p}})$ *de* $\mathbb{Q}$*.*

Denotemos o número $\sqrt{p+\sqrt{p}}$ por θ. Como $\theta^2=p+\sqrt{p}$, então $(\theta^2-p)^2=p$, pelo que θ é raiz do polinómio

$$q(x)=(x^2-p)^2-p=x^4-2px^2+p(p-1)\in\mathbb{Q}[x].$$

Pelo critério de Eisenstein, $q(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (basta considerar o primo p). Portanto, $q(x)$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, pelo que $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=4$ e $\{1,\theta,\theta^2,\theta^3\}$ é uma base desta extensão.

17. *Sejam* $\alpha^3=2$*,* w *uma raiz cúbica da unidade e* $\beta=w\alpha$*. Determine a dimensão e uma base de* $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ *sobre* $\mathbb{Q}$*.*

Pelo Teorema da Torre,

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}].$$

Como x^3-2 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein), trata-se do polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Assim, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$ e $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ é uma base desta extensão simples. Portanto,

$$\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}.$$

Por outro lado, β é também raiz do polinómio $f(x)=x^3-2$ (pois $\beta^3=w^3\alpha^3=2$). Será que este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$? Mas agora este polinómio já é

redutível sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$, uma vez que α é uma das suas raízes. Com efeito, $x^3-2=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$. Agora dois casos podem ocorrer, ou β é raiz do primeiro factor, ou é raiz do segundo factor:

Caso 1: $\beta=\alpha$. Neste caso $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=\mathbb{Q}(\alpha)$ e o problema já está resolvido (a dimensão é 3 e a base é $\{1,\alpha,\alpha^2\}$).

Caso 2: $\beta\neq\alpha$. Neste caso β é raiz de $x^2+\alpha x+\alpha^2$. Agora, para indagarmos da sua irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$, não podemos utilizar o Exercício 9(c), pois este polinómio não tem coeficientes racionais. Para verificarmos isso não temos outra hipótese senão investigar directamente se tem alguma raiz em $\mathbb{Q}(\alpha)$, ou seja, se existem racionais a,b e c tais que

$$(a+b\alpha+c\alpha^2)^2+\alpha(a+b\alpha+c\alpha^2)+\alpha^2=0.$$

Efectuando os cálculos em $\mathbb{Q}(\alpha)$, esta equação é ainda equivalente a

$$(a^2+4bc+2c)+(2ab+2c^2+a)\alpha+(2ac+b^2+b+1)\alpha^2=0.$$

Como $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{Q}(\alpha)$ (sobre $\mathbb{Q}$), obtemos

$$\begin{cases} a^2+4bc+2c=0\\ 2ab+2c^2+a=0\\ 2ac+b^2+b+1, \end{cases}$$

que é um sistema impossível em $\mathbb{Q}$:

Se $a,c\neq 0$ então

$$\begin{cases} a^3+4abc+2ac=0\\ 4abc+4c^3+2ac=0 \end{cases}$$

o que implica $a^3=4c^3$, ou seja, $a/c=\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}$!!!; para $a=0$ ou $c=0$ temos $b^2+b+1=0$, o que é impossível em $\mathbb{Q}$.

Portanto, $x^2+\alpha x+\alpha^2$ é o polinómio mínimo de β sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. Concluindo, $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]=6$ e $\{1,\alpha,\alpha^2,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta\}$ é uma base da extensão $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ de $\mathbb{Q}$.

Resolução alternativa, no Caso 2: Pela fórmula resolvente das equações de grau 2, as raízes de $x^2+\alpha x+\alpha^2$ são

$$\frac{-\alpha+\alpha i\sqrt{3}}{2}\quad\text{e}\quad\frac{-\alpha-\alpha i\sqrt{3}}{2}$$

que não pertencem a $\mathbb{Q}(\alpha)$ pois não existem racionais a,b,c tais que $\frac{-\alpha\pm\alpha i\sqrt{3}}{2}=a+b\alpha+c\alpha^2$:

$$\begin{aligned}\frac{-\alpha\pm\alpha i\sqrt{3}}{2}=a+b\alpha+c\alpha^2 &\Leftrightarrow -2a+(-1+i\sqrt{3}-2b)\alpha+c\alpha^2=0\\ &\Leftrightarrow a=0,\ c=0,\ i\sqrt{3}2b+1\in\mathbb{Q}\text{!!!}\end{aligned}$$

Portanto, $x^2+\alpha x+\alpha^2$ é o polinómio mínimo de β sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Outra resolução alternativa, no Caso 2: Como β é raiz de $x^2+\alpha x+\alpha^2$, a outra raiz é $\overline{\beta}$ e claro nenhuma pertence a $\mathbb{Q}(\alpha)$. Portanto, $x^2+\alpha x+\alpha^2$ é o polinómio mínimo de β sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$.

19. *Para cada uma das extensões de $\mathbb{Q}$ indicadas averigúe se θ gera a mesma extensão:*

(a) $\theta = 2+\sqrt[3]{4}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

(b) $\theta = \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) $\theta = u^2+u+1, \quad \mathbb{Q}(u)$, *com* $u^2+5u-5=0$.

(a) x^3-2 é o polinómio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$, logo $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$ e

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}.$$

Então $\theta\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, pelo que $\mathbb{Q}(\theta)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Por outro lado, como $\theta-2=\sqrt[3]{4}$, então $(\theta-2)^3=4$, ou seja, θ é raiz do polinómio $x^3-6x^2+12x-12$. Como este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pelo critério de Eisenstein), é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$,o que mostra que também $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]$ é igual a 3.

Concluindo, como $\mathbb{Q}(\theta)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e $\dim\mathbb{Q}(\theta)=\dim\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, as duas extensões coincidem.

(b) Neste caso, as extensões são diferentes, pois $\theta\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De facto, $\theta=\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ implicaria $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou seja, $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, o que é um absurdo, pois não existem racionais a e b tais que $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$: $b=0$ implicaria $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$; $a=0$ e $b\neq0$ implicariam $\sqrt{\frac{3}{2}}=b\in\mathbb{Q}$ e $a,b\neq0$ implicariam $\sqrt{2}=\frac{3-a^2-2b^2}{2ab}\in\mathbb{Q}$!!!

(c) Claramente $\theta\in\mathbb{Q}(u)$, donde $\mathbb{Q}(\theta)\subseteq\mathbb{Q}(u)$. Por outro lado, $\theta=u^2+u+1=5-5u+u+1=6-4u$, ou seja, $u=\frac{6-\theta}{4}\in\mathbb{Q}(\theta)$, o que mostra que também $\mathbb{Q}(\theta)\supseteq\mathbb{Q}(u)$. Portanto as extensões coincidem.

20. *Mostre que x^2+1 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_3$. Sendo u uma raiz deste polinómio determine o número de elementos de $\mathbb{Z}_3(u)$ e as tabelas de adição e multiplicação.*

Para mostrar a irredutibilidade basta verificar que nenhum elemento de $\mathbb{Z}_3$ é raiz de x^2+1.

Pelo que vimos na página 69,

$$\mathbb{Z}_3(u) \cong \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^2+1\rangle} = \{a_0 + a_1 x + \langle x^2+1\rangle \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_3\}.$$

Denotando $0+\langle x^2+1\rangle$, $1+\langle x^2+1\rangle$, $2+\langle x^2+1\rangle$, $x+\langle x^2+1\rangle$, $2x+\langle x^2+1\rangle$, $1+x+\langle x^2+1\rangle$, $1+2x+\langle x^2+1\rangle$, $2+x+\langle x^2+1\rangle$ e $2+2x+\langle x^2+1\rangle$ por, respectivamente, $0, 1, 2, u, a, b, c, d, f$, as tabelas das operações são as seguintes:

$+$	0	1	2	u	a	b	c	d	f
0	0	1	2	u	a	b	c	d	f
1	1	2	0	b	c	d	f	u	a
2	2	0	1	d	f	u	a	b	c
u	u	b	d	a	0	c	1	f	2
a	a	c	f	0	u	1	b	2	d
b	b	d	u	c	1	f	2	a	0
c	c	f	a	1	b	2	d	0	u
d	d	u	b	f	2	a	0	c	1
f	f	a	c	2	d	0	u	1	b

$\cdot$	0	1	2	u	a	b	c	d	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	u	a	b	c	d	f
2	0	2	1	a	u	f	d	c	b
u	0	u	a	2	1	d	b	f	c
a	0	a	u	1	2	c	f	b	d
b	0	b	f	d	c	a	2	1	u
c	0	c	d	b	f	2	u	a	1
d	0	d	c	f	b	1	a	u	2
f	0	f	b	c	d	u	1	2	a

23. *Considere o polinómio* $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ *sobre* $\mathbb{Q}$.

(a) *Mostre que* $p(x)$ *é irredutível sobre* $\mathbb{Q}$.

(b) *Construa uma extensão de decomposição de* $p(x)$ *e determine a sua dimensão.*

(a) As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

(b) Como $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x]\} \\ &= \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x], gr(a(x)) \leq 2\} \\ &\cong \mathbb{Q}(\theta), \end{aligned}$$

onde $8\theta^3 - 6\theta - 1 = 0$. Como $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 3$ pelo que

$$\mathbb{Q}(\theta) = \{a + b\theta + c\theta^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Nesta extensão já o polinómio $8x^3 - 6x - 1$ tem uma raiz (precisamente o elemento θ) pelo que é redutível. Dividindo $8x^3 - 6x - 1$ pelo factor $x - \theta$ obtém-se:

$$8x^3 - 6x - 1 = (x - \theta)(8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6).$$

Teremos agora que verificar se o factor $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6$ é ou não redutível sobre $\mathbb{Q}(\theta)$ para concluirmos se esta é ou não a extensão de decomposição do polinómio $p(x)$.

Trata-se de um polinómio de grau 2 pelo que bastará verificar se tem raízes em $\mathbb{Q}(\theta)$. Averiguemos então se existem racionais a, b, c tais que

$$8(a + b\theta + c\theta^2)^2 + 8\theta(a + b\theta + c\theta^2) + 8\theta^2 - 6 = 0.$$

Efectuando os cálculos obtemos

$$(8a^2 - 6) + (16ab + 8a)\theta + (8b^2 + 16ac + 8b + 8)\theta^2 + (16bc + 8c)\theta^3 + 8c^2\theta^4 = 0.$$

Mas $8\theta^3 = 6\theta + 1$ (donde $8\theta^4 = 6\theta^2 + \theta$) pelo que podemos ainda escrever

$$(8a^2 - 6 + 2bc + c) + (16ab + 8a + 12bc + 6c + c^2)\theta + (8b^2 + 16ac + 8b + 8 + 6c^2)\theta^2 = 0.$$

Então, como $1, \theta$ e θ^2 são linearmente independentes, esta igualdade é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 8a^2 - 6 + 2bc + c0 \\ 16ab + 8a + 12bc + 6c + c^2 = 0 \\ 8b^2 + 16ac + 8b + 8 + 6c^2 = 0. \end{cases}$$

Este sistema não parece ser fácil de resolver. Tem no entanto uma solução fácil de encontrar após alguma procura e experimentação: $a = 1, b = 0, c = -2$. Isto mostra que o elemento $1 - 2\theta^2$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ é uma raiz de $p(x)$ pois é raiz do seu factor $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6$. Portanto este factor é divisível por $x - (1 - 2\theta^2)$. Efectuando a divisão obtemos $8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6 = (x - 1 + 2\theta^2)(8x + 8 + 8\theta - 16\theta^2)$. Em conclusão,

$$\begin{aligned} 8x^3 - 6x - 1 &= (x - \theta)(8x^2 + 8\theta x + 8\theta^2 - 6) \\ &= 8(x - \theta)(x - 1 + 2\theta^2)(x + 1 + \theta - 2\theta^2) \\ &= 8(x - \theta)(x - (1 - 2\theta^2))(x - (-1 - \theta + 2\theta^2)) \end{aligned}$$

o que mostra que θ, $1 - 2\theta^2$ e $-1 - \theta + 2\theta^2$ são as três raízes de $p(x)$ e que $\mathbb{Q}(\theta)$ é de facto a sua extensão de decomposição (que tem dimensão 3).

26. *Determine os $\mathbb{Q}$-automorfismos de L para:*

(a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) O elemento $\sqrt{2}$ tem polinómio mínimo $x^2 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Pela Proposição 3.15, qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ transforma raízes deste polinómio em raízes do mesmo polinómio. Existem, pois, precisamente dois $\mathbb{Q}$-automorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\sqrt{2}}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt{2} & \mapsto & \sqrt{2} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_{-\sqrt{2}}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt{2} & \mapsto & -\sqrt{2}. \end{array}$$

O primeiro é a identidade e o segundo aplica cada elemento $a+b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ em $a - b\sqrt{2}$.

(c) Cada $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. A restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$. Então, pela Proposição 3.15, só há duas possibilidades para esta restrição, como vimos na alínea anterior: é a identidade ou aplica cada elemento $a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ em $a - b\sqrt{2}$. Portanto, Φ prolonga o isomorfismo identidade de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ou prolonga o isomorfismo $\Phi_{-\sqrt{2}}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Usando novamente a Proposição 3.15, como $x^2 - 3$ é o polinómio mínimo de $\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, estes dois isomorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ só podem ser prolongados a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ aplicando $\sqrt{3}$ em $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$. Portanto, só existem 4 possibilidades para Φ: a identidade e

$$\Phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = \sqrt{3};$$

$$\Phi(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3};$$

$$\Phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \Phi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

O grupo de Galois tem, pois, neste caso, 4 elementos, que designamos respectivamente por $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$:

$$\Phi_0(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

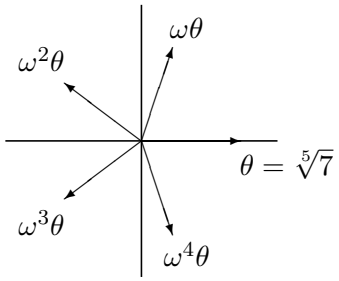
$$\Phi_1(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

$$\Phi_2(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3},$$

$$\Phi_3(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3}.$$

29. *Seja θ a raiz real do polinómio $x^5 - 7$. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\theta)$ de $\mathbb{Q}$.*

É claro que $\theta = \sqrt[5]{7}$ (as outras 4 raízes não são reais):



$\omega =$ raiz quinta de 1,
no 1^o quadrante

Portanto, θ tem polinómio mínimo $x^5 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$. Qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$

$$\Phi : \mathbb{Q}(\theta) \to \mathbb{Q}(\theta)$$

mantém fixos os números racionais e transforma θ numa raiz do mesmo polinómio em $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \subseteq \mathbb{R}$. Logo, necessariamente, $\Phi(\theta) = \theta$ e só existe um $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[5]{7} & \mapsto & \sqrt[5]{7} \end{array}$$

que é a identidade. Assim, $Gal(\mathbb{Q}(\theta), \mathbb{Q})$ é o grupo trivial $S_1 = \{id\}$.

31.

(a) *Para as extensões L de $\mathbb{Q}$ do exercício 26, calcule os respectivos grupos de Galois, $Gal(L, \mathbb{Q})$.*

(b) *Verifique em quais desses casos a correspondência de Galois entre os subgrupos do grupo de Galois e as extensões intermédias (entre $\mathbb{Q}$ e L) é uma bijecção.*

(a) No primeiro caso, $Gal(L, \mathbb{Q}) = \{id, \Phi_{-\sqrt{2}}\}$ é um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

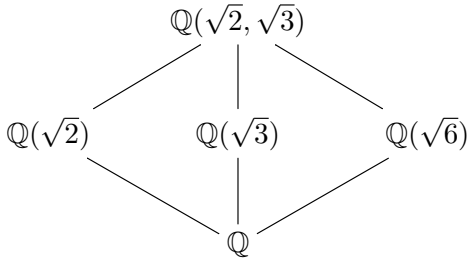
No terceiro caso, o grupo de Galois tem 4 elementos, sendo a tabela do grupo a seguinte:

$\circ$	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Φ_0	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Φ_1	Φ_1	Φ_0	Φ_3	Φ_2
Φ_2	Φ_2	Φ_3	Φ_0	Φ_1
Φ_3	Φ_3	Φ_2	Φ_1	Φ_0

Em conclusão, este grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(b) No primeiro caso, as extensões intermédias são só os próprios $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como $\mathbb{Z}_2$ só tem os dois subgrupos triviais ($\{0\}$ e o próprio $\mathbb{Z}_2$), neste caso a correspondência de Galois é uma bijecção.

No segundo caso, o diagrama com as extensões intermédias é o seguinte:



A lista de subgrupos de $Gal(L,\mathbb{Q})$ é $\{\Phi_0\}$, $\{\Phi_0,\Phi_1\}$, $\{\Phi_0,\Phi 2\}$, $\{\Phi_0,\Phi_3\}$, $\{\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\}$. Neste caso, também há bijecção.

32. *Considere a extensão* $L=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[3]{2})\subseteq\mathbb{R}$ *de* $\mathbb{Q}$.

(a) *Como se define o grupo de Galois de* L *(sobre* $\mathbb{Q}$*)? Determine-o.*

(b) *Indique todas as extensões intermédias de* $\mathbb{Q}$ *em* L.

(c) L *é uma extensão de Galois de* $\mathbb{Q}$*? Justifique.*

(a) Seja $L=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[3]{2})$. Cada $\Phi\in Gal(L,\mathbb{Q})$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt{3},\sqrt[3]{2}\}$. A restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}:\mathbb{Q}(\sqrt{3})\to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$. Então, pela Proposição 3.15, só há duas possibilidades para esta restrição: é a identidade ou aplica cada elemento $a+b\sqrt{3}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ em $a-b\sqrt{3}$. Portanto, Φ prolonga o isomorfismo identidade de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ou prolonga o isomorfismo $\Phi_{-\sqrt{3}}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Pela Proposição 3.15, como x^3-2 é o polinómio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, o número de prolongamentos de Φ a L é igual ao número de raízes distintas de x^3-2 em L, ou seja, um (que corresponde à única raiz $\sqrt[3]{2}$). Assim, os dois isomorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ só podem ser prolongados a $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[3]{2})$ aplicando $\sqrt[3]{2}$ em $\sqrt[3]{2}$, pelo que existem exactamente duas possibilidades para Φ: a identidade ou

$$\Phi(\sqrt{3})=-\sqrt{3},\ \Phi(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}.$$

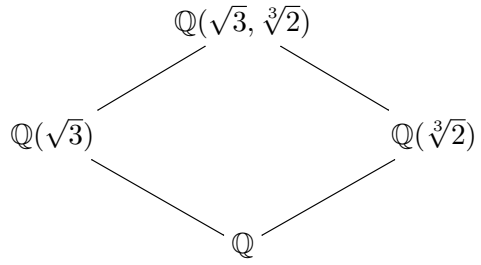
O grupo de Galois tem pois dois elementos:

$$\Phi_0(a+b\sqrt{3}+c\sqrt[3]{2})=a+b\sqrt{3}+c\sqrt[3]{2},$$

$$\Phi_1(a + b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2}) = a - b\sqrt{3} + c\sqrt[3]{2}.$$

Neste caso, $Gal(L, \mathbb{Q})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

(b) Note que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$, pelo que as únicas extensões intermédias de $\mathbb{Q}$ em L são:



(c) Não, pois $[L : \mathbb{Q}] = 6$ mas $|Gal(L, \mathbb{Q})| = 2$ (e pelo Teorema 3.21, se $|Gal(L, K)|$ é diferente de $[L : K]$, então L não é uma extensão normal de K).

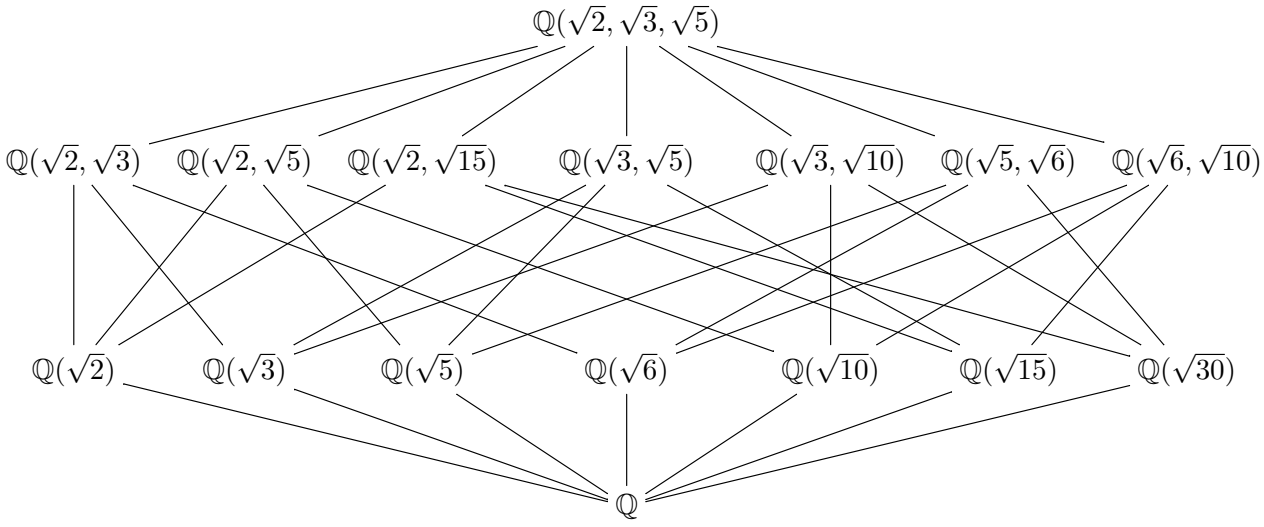
2*.

(a) *Determine os corpos intermédios entre* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

(b) *Calcule o respectivo grupo de Galois e compare os resultados.*

(a) Como $2 \times 3 \times 5 = 30$ tem como divisores 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30, as extensões simples entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ são $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{30})$. Quanto às extensões duplas, temos:
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{10})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{15}, \sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{15})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{30})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{15})$.

O diagrama seguinte mostra-nos todas as extensões intermédias entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$:



(b) Neste caso, $Gal(L,\mathbb{Q})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

4*. *Calcule o grupo de Galois do polinómio* $f(x) = x^4 - 2$ *sobre o corpo* $\mathbb{Q}$.

Uma vez que o polinómio $f(x) = x^4 - 2$ tem raízes

$$\theta_1 = \sqrt[4]{2},\ \theta_2 = -\sqrt[4]{2},\ \theta_3 = \sqrt[4]{2}\,i,\ \theta_4 = -\sqrt[4]{2}\,i$$

então $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ é a extensão de decomposição de $f(x)$. Portanto, o grupo pedido é o grupo $Gal(L,\mathbb{Q}) = Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q})$. Teremos então que determinar todos os $\mathbb{Q}$-automorfismos de L.

Cada $\mathbb{Q}$-automorfismo $\Phi : L \to L$ é completamente determinado pela sua acção no conjunto $\{\sqrt[4]{2}, i\}$ (uma vez que todo o elemento de L é uma combinação linear racional de potências de $\sqrt[4]{2}$ e i). A respectiva restrição $\Phi|_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})} : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to L$ é um homomorfismo injectivo que mantém fixos os elementos de $\mathbb{Q}$ (ou seja, é um prolongamento do isomorfismo $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$). Estes podem ser determinados com o auxílio da Proposição 3.15:

O elemento $\sqrt[4]{2}$ tem polinómio mínimo $x^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, o que significa em particular que

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}.$$

Pela Proposição 3.15, o isomorfismo $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ pode ser prolongado a um homomorfismo injectivo $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to L$ se e só se $x^4 - 2$ tem uma raiz em L, e o número desses prolongamentos é igual ao número de raízes distintas de $x^4 - 2$ em L, ou seja 4:

$$\begin{array}{rccc} \phi_1: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_1 = \sqrt[4]{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_2: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_2 = -\sqrt[4]{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_3: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_3 = \sqrt[4]{2}\, i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_4: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & L \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \theta_4 = -\sqrt[4]{2}\, i. \end{array}$$

Estes são pois os únicos homomorfismos injectivos $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to L$ que prolongam a $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ e, consequentemente, os $\Phi : L \to L$ que procuramos, quando restritos a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, coincidem necessariamente com um dos ϕ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dito de outro modo, claramente equivalente, os $\Phi : L \to L$ que procuramos são os prolongamentos a L de cada um dos seguintes isomorfismos de corpos:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_1: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_2: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_3: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\, i) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\, i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\phi}_4: & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\, i) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\, i. \end{array}$$

$x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ é o polinómio mínimo de i sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Usando novamente a Proposição 3.15, como cada um dos $\tilde{\phi}_i$ mantém fixos os coeficientes de $x^2 + 1$ e este polinómio tem duas raízes distintas em L, podemos concluir que cada um dos isomorfismos $\tilde{\phi}_i$ vai ter dois prolongamentos a homomorfismos injectivos de extensões $L \to L$, um que transforma i em i e o outro transforma i na outra raiz $-i$.

Começando com $\tilde{\phi}_1$

$$\begin{array}{ccc} L & \overset{\Phi=?}{\dashrightarrow} & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{x^2+1} & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \xrightarrow{\tilde{\phi}_1 = id} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & \boxed{x^2+1} \end{array}$$

obtemos

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_2: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & -i. \end{array}$$

Φ_1 é simplesmente a identidade e Φ_2 é o isomorfismo definido por

$$a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8} + a_4\, i + a_5\sqrt[4]{2}\, i + a_6\sqrt[4]{4}\, i + a_7\sqrt[4]{8}\, i$$

$$\downarrow$$

$$a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8} - a_4\, i - a_5\sqrt[4]{2}\, i - a_6\sqrt[4]{4}\, i - a_7\sqrt[4]{8}\, i.$$

Fazendo o mesmo para $\tilde{\phi}_2$, $\tilde{\phi}_3$ e $\tilde{\phi}_4$ obtemos sucessivamente

$$\begin{array}{rccc} \Phi_3: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_4: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2} \\ & i & \mapsto & -i \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_5: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\, i \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_6: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & \sqrt[4]{2}\, i \\ & i & \mapsto & -i \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_7: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\, i \\ & i & \mapsto & i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_8: & L & \to & L \\ & a\in\mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[4]{2} & \mapsto & -\sqrt[4]{2}\, i \\ & i & \mapsto & -i. \end{array}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \Phi_7(a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8} + a_4\, i + a_5\sqrt[4]{2}\, i + a_6\sqrt[4]{4}\, i + a_7\sqrt[4]{8}\, i) = \\ = a_0 - a_1\sqrt[4]{2}\, i - a_2\sqrt[4]{4} + a_3\sqrt[4]{8}\, i + a_4\, i + a_5\sqrt[4]{2} - a_6\sqrt[4]{4}\, i - a_7\sqrt[4]{8} \\ = a_0 + a_5\sqrt[4]{2} - a_2\sqrt[4]{4} - a_7\sqrt[4]{8} + a_4\, i - a_1\sqrt[4]{2}\, i - a_6\sqrt[4]{4}\, i + a_3\sqrt[4]{8}\, i. \end{aligned}$$

Portanto, $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q}) = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6, \Phi_7, \Phi_8\}$. Observemos ainda como pode ser descrito como um subgrupo de $\mathcal{S}_4$:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_4 & \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$$

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34), \quad \Phi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\Phi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1324), \quad \Phi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$$

$$\Phi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1423), \quad \Phi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23).$$

Em conclusão:

$$\boxed{Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q}) = \Big\{id, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\Big\}}$$

5*. *Considere um polinómio $f(x)$ irredutível, de grau 3, escrito na sua forma reduzida $x^3 + px + q$, e as suas três raízes complexas distintas a, b, e c.*

(a) *Verifique que* $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+ac+bc=p \\ abc=-q. \end{cases}$

(b) *A partir da alínea anterior, mostre que* $((a-b)(a-c)(b-c))^2 = -4p^3 - 27q^2$.

(c) *Seja D o número $-4p^3 - 27q^2$ da alínea anterior. Prove que se $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ e $\Phi \in Gal(f(x), \mathbb{Q})$, então $\Phi(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$ e, portanto, $Gal(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{A}_3$.*

(d) *Prove que se $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ está na extensão de decomposição de $f(x)$ e, portanto, $Gal(f(x), \mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$.*

(a) Basta observar que $x^3+px+q = (x-a)(x-b)(x-c)$ é equivalente a $x^3+px+q = x^3 + (-c-a-b)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$.

(b) Basta, com um pouco de paciência, desenvolver ambos os membros (substituindo, no segundo, p por $ab+ac+bc$ e q por $-abc$), até as expressões coincidirem.

(c) Pela Proposição 3.19, $Gal(f(x),\mathbb{Q})$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathcal{S}_3$. Seja $\Phi \in Gal(f(x),\mathbb{Q}) = Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})$. Por definição, Φ, sendo um $\mathbb{Q}$-automorfismo, terá que preservar os racionais, logo $\Phi(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$, isto é, $\Phi((a-b)(a-c)(b-c)) = (a-b)(a-c)(b-c)$. Consequentemente,

$$(\Phi(a)-\Phi(b))(\Phi(a)-\Phi(c))(\Phi(b)-\Phi(c)) = (a-b)(a-c)(b-c). \quad (2)$$

Mas Φ permuta as raízes a, b e c entre si. Para que se cumpra (2), essa permutação não pode ser ímpar (se fosse ímpar teríamos

$$(\Phi(a)-\Phi(b))(\Phi(a)-\Phi(c))(\Phi(b)-\Phi(c)) = -(a-b)(a-c)(b-c)).$$

Sobram assim só as 3 permutações pares para eventual definição de $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}(a,b,c)$. Não é difícil ver que todas elas definem de facto $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}(a,b,c)$, pelo que $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q}) \cong \mathcal{A}_3$. Esta conclusão também se pode tirar do seguinte: como, pelo Teorema 3.21, se tem $|Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}]$, bastará mostrar que $[\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}] \geq 3$, o que é simples:

$$[\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b,c):\mathbb{Q}(a)][\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] \geq 3,$$

pois $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = gr(f(x)) = 3$.

(d) Neste caso, se $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, já $\Phi(\sqrt{D})$ não precisa de ser igual a $\sqrt{D}$, e as permutações ímpares também definem elementos de $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q})$. Consequentemente, $Gal(\mathbb{Q}(a,b,c),\mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$.

7*(a). *Sejam $p \geq 5$ um número primo, e $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio irredutível de grau p. Mostre que se $f(x)$ tem exactamente duas raízes complexas não reais, então $Gal(f(x),\mathbb{Q})$ é o grupo simétrico $\mathcal{S}_p$ e portanto $f(x)$ não é resolúvel por radicais.*

Basta fazer o mesmo que na demonstração do Corolário 3.29 (Teorema de Abel-Ruffini).

8*. *Mostre que os seguintes polinómios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ não são resolúveis por radicais:*

(a) $2x^5 - 10x + 5$.

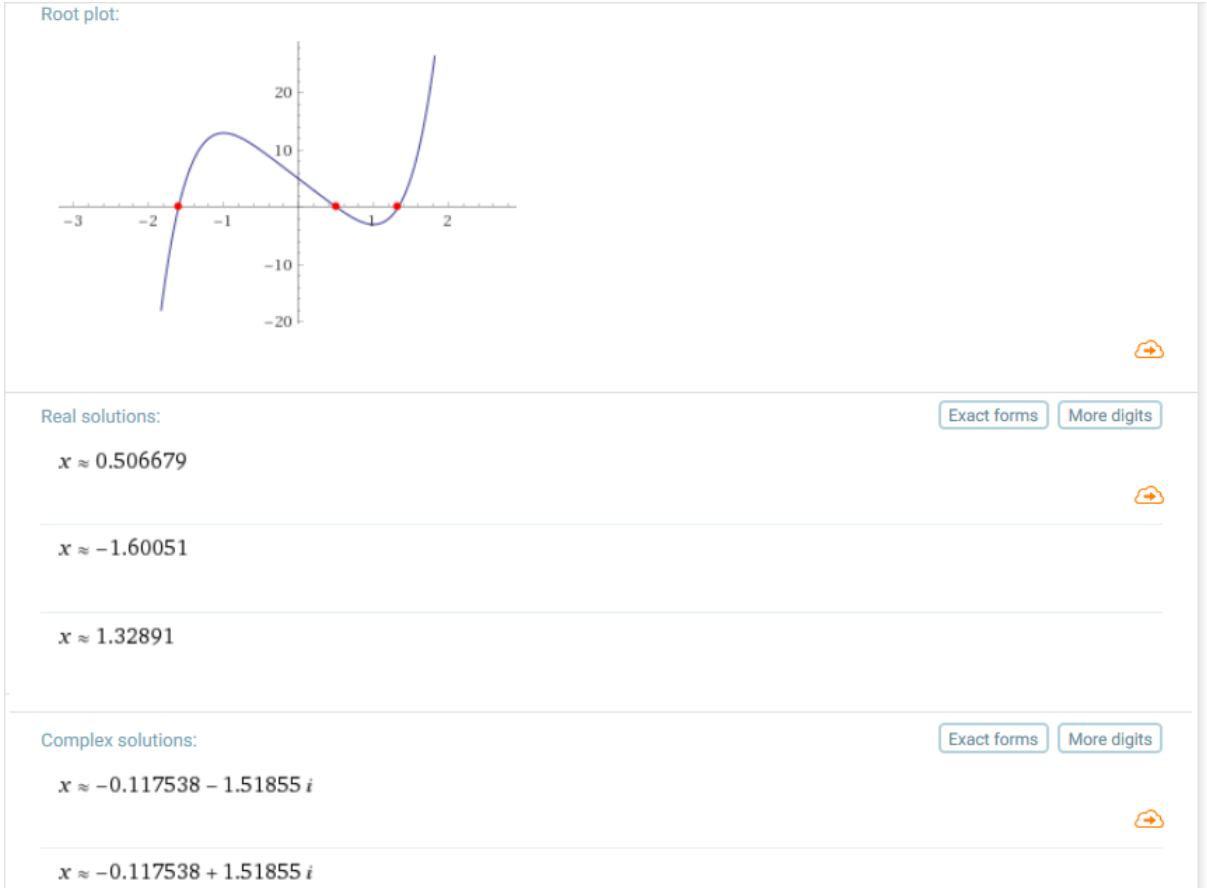
(b) $2x^5 - 5x^4 + 20$.

(c) $x^5 - 6x^2 + 5$.

(d) $x^7 - 10x^5 + 15x + 5$.

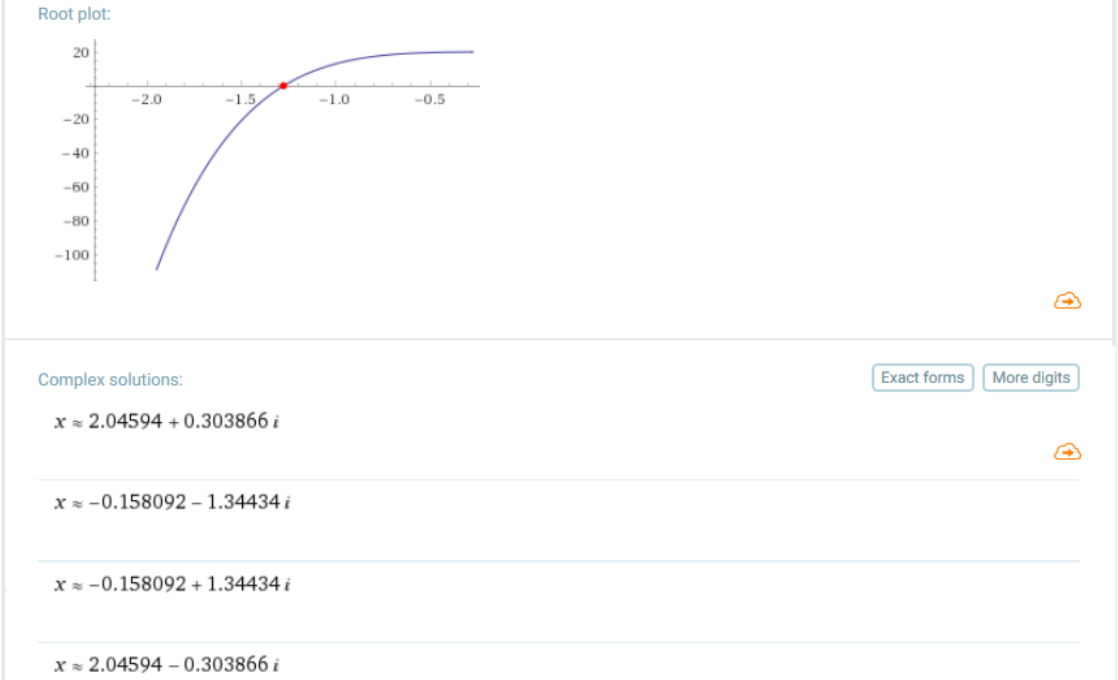
Fazendo o estudo e esboço das respectivas funções (ou, alternativamente, usando métodos da Matemática Numérica para localização de raízes, ou consultando o Wolfram Alpha ou algum software como o Mathematica ou Maple) não é difícil confirmar que:

(a) Este polinómio tem exactamente 2 raízes complexas não reais:



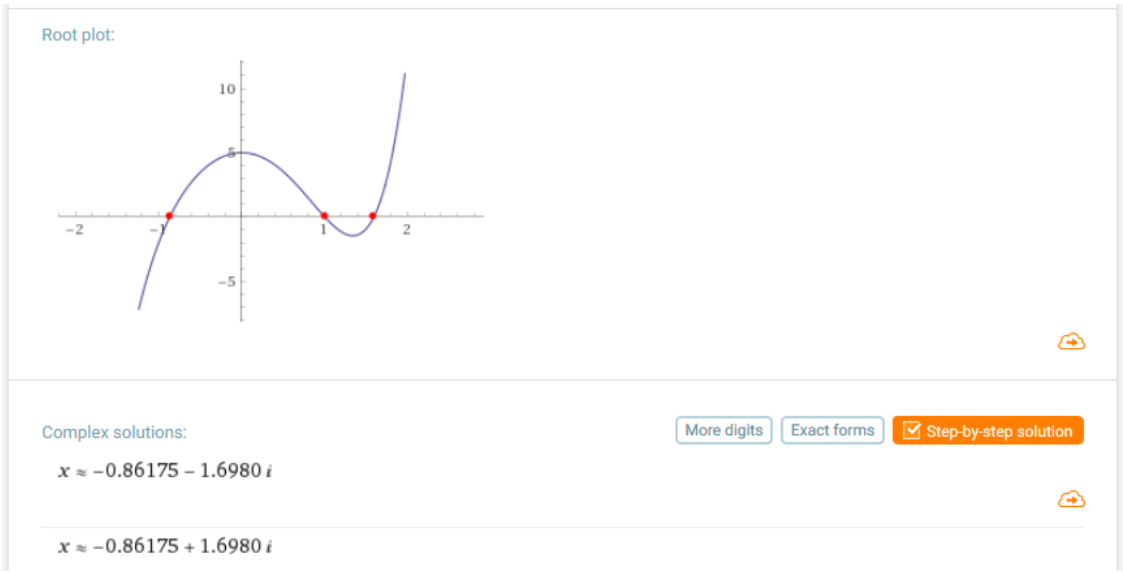
A conclusão segue do Exercício 7*(a).

(b) Este polinómio tem exactamente 4 raízes complexas não reais:



A conclusão segue do Exercício 7*(b).

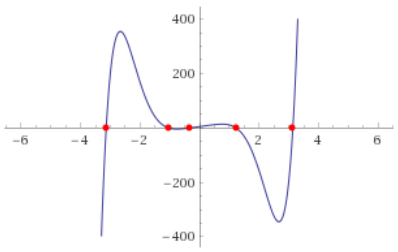
(c) Tem exactamente 2 raízes complexas não reais:



A conclusão segue do Exercício 7*(a).

(d) Tem exactamente 2 raízes complexas não reais:

Root plot:



Real solutions: Exact forms More digits

$x \approx -3.14041$

$x \approx -1.03263$

$x \approx -0.336163$

$x \approx 1.22404$

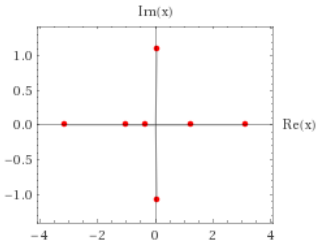
$x \approx 3.135$

Complex solutions: Exact forms More digits

$x \approx 0.0750814 - 1.09069\,i$

$x \approx 0.0750814 + 1.09069\,i$

Roots in the complex plane:



A conclusão segue do Exercício 7*(a).