

Orientação de uma base em $\mathbb{R}^3$

(Intuitivamente, é a orientação que distingue entre uma luva direita e uma luva esquerda no espaço usual.)

Seja $E = (e_1, e_2, e_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e seja $F = (f_1, f_2, f_3)$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Então a matriz

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{pmatrix}$$

é ortogonal (isto é, $F^{-1} = F^T$) pelo que o seu determinante é ± 1 . Portanto, o produto misto $[f_1, f_2, f_3]$ é igual a

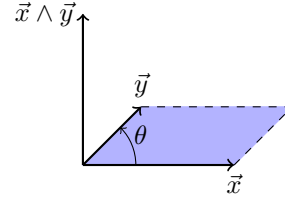
$$(f_1 \wedge f_2 \mid f_3) = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

No caso em que é igual a 1, diz-se que a base F tem a mesma orientação que E , isto é, tem *orientação positiva*; caso contrário, diz-se que F tem *orientação negativa*.

Resolução do Exercício 2 sobre o produto vetorial

2. Em $\mathbb{R}^3$ considere uma base ortonormada $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ com orientação positiva. Dados dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ defina o produto vetorial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ usando o determinante simbólico cuja primeira linha é $\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}$ sendo a segunda e terceira formadas, respectivamente, pelas coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$



O objectivo das alíneas seguintes é mostrar que o produto vetorial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ não depende da base, nas condições anteriores, que se fixa.

- (a) Prove que $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \mid \vec{y})^2$.

Solução: Uma vez que

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \quad (1)$$

e a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é ortonormada, temos

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2. \quad (2)$$

Por outro lado, $(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ donde

$$\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \mid \vec{y})^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \quad (3)$$

Desenvolvendo os quadrados é fácil verificar que (2) e (3) são iguais.

- (b) Prove que se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são não nulos então $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$, sendo θ o ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Solução: Pela alínea anterior e pela fórmula em 1(g) obtemos

$$\begin{aligned}\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} | \vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

o que implica

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$$

uma vez que $\sin \theta \geq 0$ (pois $\theta \in [0, \pi]$).

- (c) Prove que $(\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{x}) = (\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{y}) = 0$, pelo que $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}$ e $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{y}$.

Solução: Usando (1) temos

$$(\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{x}) = (x_2 y_3 - x_3 y_2)x_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)x_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)x_3 = \dots = 0.$$

A prova de $(\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{y}) = 0$ é análoga.

- (d) Mostre que, sendo $\vec{x} \wedge \vec{y} \neq 0$, então $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ é uma base ordenada que determina a mesma orientação que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Solução: Novamente usando (1), podemos calcular o determinante da matriz formada pelos vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{x} \wedge \vec{y}$ (desenvolvendo o determinante pela terceira coluna):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_2 & y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_3 & y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix} = \dots = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = \|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 > 0.$$

O determinante ser $\neq 0$ mostra que os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{x} \wedge \vec{y}$ são linearmente independentes, pelo que formam uma base de $\mathbb{R}^3$; como este determinante é positivo, esta base tem a mesma orientação que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- (e) Mostre que $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$ se e só se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são linearmente dependentes.

Solução: Usando a fórmula da alínea (b) temos

$$\begin{aligned}\vec{x} \wedge \vec{y} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{y}\| = 0 \text{ ou } \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{x} = 0 \text{ ou } \vec{y} = 0 \text{ ou } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ e } \vec{y} \text{ são linearmente dependentes.}\end{aligned}$$

- (f) Considerando $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ outra base ortonormada com a orientação usual de $\mathbb{R}^3$, defina $\vec{x} \overline{\wedge} \vec{y}$ de forma análoga a $\vec{x} \wedge \vec{y}$. Mostre que $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \overline{\wedge} \vec{y}$.

Solução: Fazendo de modo semelhante como em (a), podemos provar que

$$\|\vec{x} \overline{\wedge} \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} | \vec{y})^2 = \|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2$$

pelo que

$$\| \vec{x} \wedge \vec{y} \| = \| \vec{x} \wedge \vec{y} \| . \quad (4)$$

Em particular, $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$ se e só se $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$, restando estudar o caso $\vec{x} \wedge \vec{y} \neq 0$ e $\vec{x} \wedge \vec{y} \neq 0$.

Neste caso, analogamente como em (c) e (d), podemos concluir que também

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x} \text{ e } \vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{y} \quad (5)$$

e que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ é uma base ordenada, com a mesma orientação que $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, ou seja, a mesma orientação que a base canónica. Portanto

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}) \text{ e } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}) \text{ têm a mesma orientação.} \quad (6)$$

Em conclusão, (4), (5) e (6) mostram que $\vec{x} \wedge \vec{y}$ é um vetor com a mesma direção, sentido e comprimento que $\vec{x} \wedge \vec{y}$, isto é,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge \vec{y}.$$