

Curvas em $\mathbb{R}^3$

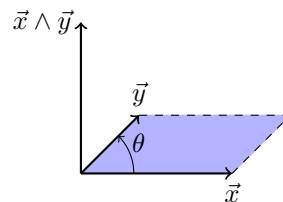
1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$

1. Mostre que o produto escalar e a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ satisfazem as seguintes propriedades, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (a) $(\vec{x} | \vec{x}) > 0$ se $\vec{x} \neq 0$.
- (b) $(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{y} | \vec{x})$.
- (c) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} | \vec{z}) = \alpha(\vec{x} | \vec{z}) + \beta(\vec{y} | \vec{z})$.
- (d) $\|\vec{x}\| > 0$ se $\vec{x} \neq 0$.
- (e) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$.
- (f) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
- (g) $(\vec{x} | \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$.
- (h) $\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

2. Em $\mathbb{R}^3$ considere uma base ortonormada $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ com orientação positiva. Dados dois vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ defina o produto vectorial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ usando o determinante simbólico cuja primeira linha é $\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}$ sendo a segunda e terceira formadas, respectivamente, pelas coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$



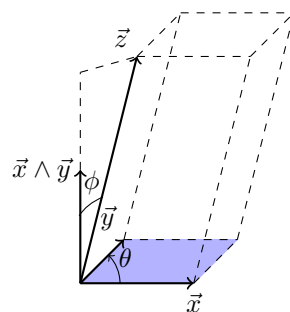
O objectivo das alíneas seguintes é mostrar que o produto vectorial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ não depende da base, nas condições anteriores, que se fixa.

- (a) Prove que $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} | \vec{y})^2$.
- (b) Prove que se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são não nulos então $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$, sendo θ o ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$.
- (c) Prove que $(\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{x}) = (\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{y}) = 0$, pelo que $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}$ e $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{y}$.
- (d) Mostre que, sendo $\vec{x} \wedge \vec{y} \neq 0$, então $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ é uma base ordenada que determina a mesma orientação que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- (e) Mostre que $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$ se e só se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são linearmente dependentes.
- (f) Considerando $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ outra base ortonormada com a orientação usual de $\mathbb{R}^3$, defina $\vec{x} \overline{\times} \vec{y}$ de forma análoga a $\vec{x} \wedge \vec{y}$. Mostre que $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \overline{\times} \vec{y}$.

3. Prove que o produto misto

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &\longmapsto [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] := (\vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{z}), \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:



$$(a) \quad [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$(b) \quad [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \mid \vec{y} \wedge \vec{z}).$$

$$(c) \quad [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0 \text{ se e só se } \vec{x}, \vec{y} \text{ e } \vec{z} \text{ são linearmente dependentes.}$$

2. Que é uma curva?

1. Determine parametrizações $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ das seguintes curvas de nível:

$$(a) \quad \text{Parábola } P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}.$$

$$(b) \quad \text{Circunferência } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$(c) \quad \text{Hipérbole } H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1, y > 0\}.$$

$$(d) \quad \text{Elipse } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}.$$

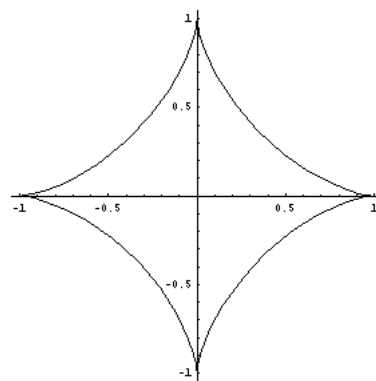
2. Será que $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ é uma parametrização da parábola $y = x^2$?

3. Determine as equações cartesianas dos traços $\gamma(\mathbb{R})$ das curvas planas definidas pelas seguintes parametrizações:

$$(a) \quad \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t).$$

$$(b) \quad \gamma(t) = (e^t, t^2).$$

$$(c) \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \text{ (astróide, na figura ao lado).}$$



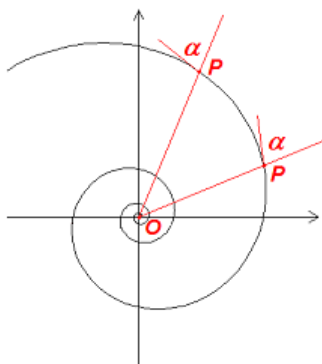
4. Calcule os vectores tangentes das curvas do Exercício 2.3. Em que pontos é que o vector tangente ao astróide se anula? Identifique-os na figura.

5. Determine as rectas tangentes às curvas dadas nos pontos indicados:

$$(a) \quad \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2)), t = \pi.$$

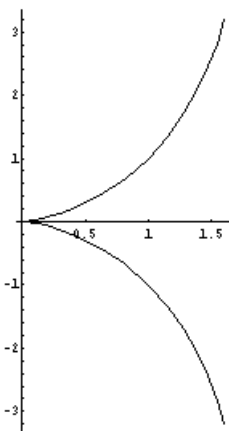
$$(b) \quad \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (e^{-t}, t^2, 5 + t), t = 0.$$

6. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.



Mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vector tangente em $\gamma(t)$ não depende de t .

7. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, t)$. Prove que o traço de γ está contido num cilindro elíptico. Determine a velocidade de γ no ponto que está no plano $z = 0$.
8. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:
 - (a) Espiral logaritmica, a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$.
 - (b) Catenária $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, a partir do ponto $(0, 1)$.
 - (c) Ciclóide (Exercício 2.22) correspondente a uma revolução completa da circunferência.
9. Mostre que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco:
 - (a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.
 - (b) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t\right)$.
10. Mostre que as seguintes funções são mudanças de parâmetro:
 - (a) $\lambda : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ definida por $\lambda(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.
 - (b) $\lambda : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) = \tan(\frac{\pi}{2}t)$.
11. Prove que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma a que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.
12. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (t, \sin t, e^t)$. Prove que $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (\ln t, \sin(\ln t), t)$ é uma reparametrização de α .
13. A Cissóide de Diocles é a curva cuja equação em termos de coordenadas polares (r, θ) é $r = \sin \theta \tan \theta$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$.



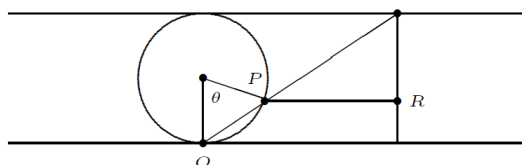
Escreva uma parametrização da cissóide usando θ como parâmetro e mostre que $\gamma(t) = (t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}})$ $(-1 < t < 1)$ é uma sua reparametrização.

14. Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$. Determine os valores de a e b para os quais $\gamma_{a,b}$ é regular.
15. Considere as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\beta(t) = (t^3, t^6)$, respectivamente. Prove que α e β têm o mesmo traço mas α é regular e β não o é.
16. Quais das seguintes curvas são regulares?

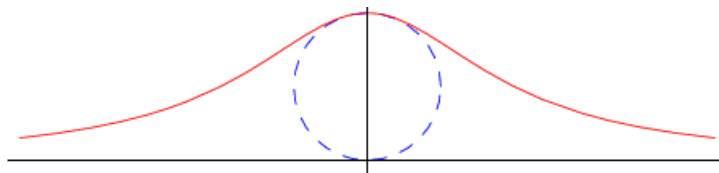
- (a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.
- (b) Curva da alínea anterior, mas com $t \in (0, \pi/2)$.
- (c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.

Determine reparametrizações por comprimento de arco das que são regulares.

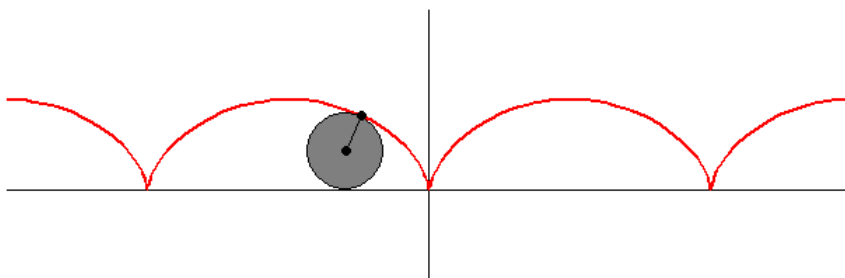
17. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.
 - (a) Reparametrize γ por comprimento de arco.
 - (b) Calcule o comprimento de arco de γ em $[0, \pi]$.
18. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco. Prove que:
 - (a) O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ são paralelas.
 - (b) O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ passam por um mesmo ponto fixo.
19. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que γ tem velocidade constante se e só se os vectores $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ são ortogonais, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.
20. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular para a qual existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) - a$ e $\gamma'(t)$ são ortogonais. Mostre que γ é uma curva esférica (isto é, o seu traço está contido numa esfera).
21. Seja P um ponto de uma circunferência C (no plano XOY) de raio $a > 0$ e centro $(0, a)$ e seja Q o ponto de intersecção da recta $y = 2a$ com a recta que passa pela origem e por P . Seja ainda R o ponto de intersecção da recta horizontal que passa por P com a recta vertical que passa por Q .



À medida que P se move ao longo de C , R descreve uma curva chamada curva de Agnesi. Determine uma parametrização desta curva e a respectiva equação cartesiana.



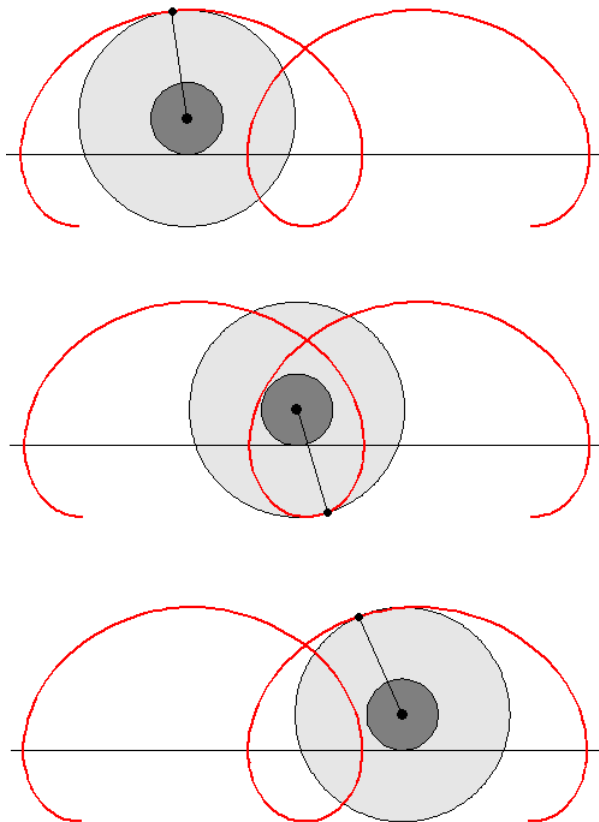
22. Considere uma circunferência a rolar, sem escorregar, numa superfície plana, ao longo de uma linha recta. Chama-se cicloide à curva plana descrita por um ponto nessa circunferência.



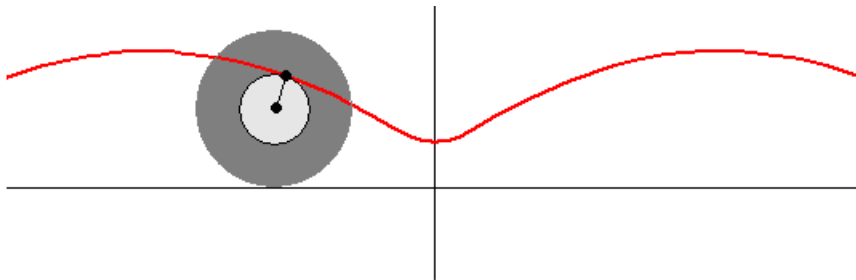
Mostre que, se a linha recta for o eixo OX e a circunferência tiver raio $a > 0$, a cicloide pode ser parametrizada por $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

23. Generalize o exercício anterior, determinando uma parametrização da curva descrita por um ponto numa circunferência de raio b quando uma outra circunferência concêntrica de raio a rola, sem escorregar, sobre uma linha recta.

Caso $a < b$

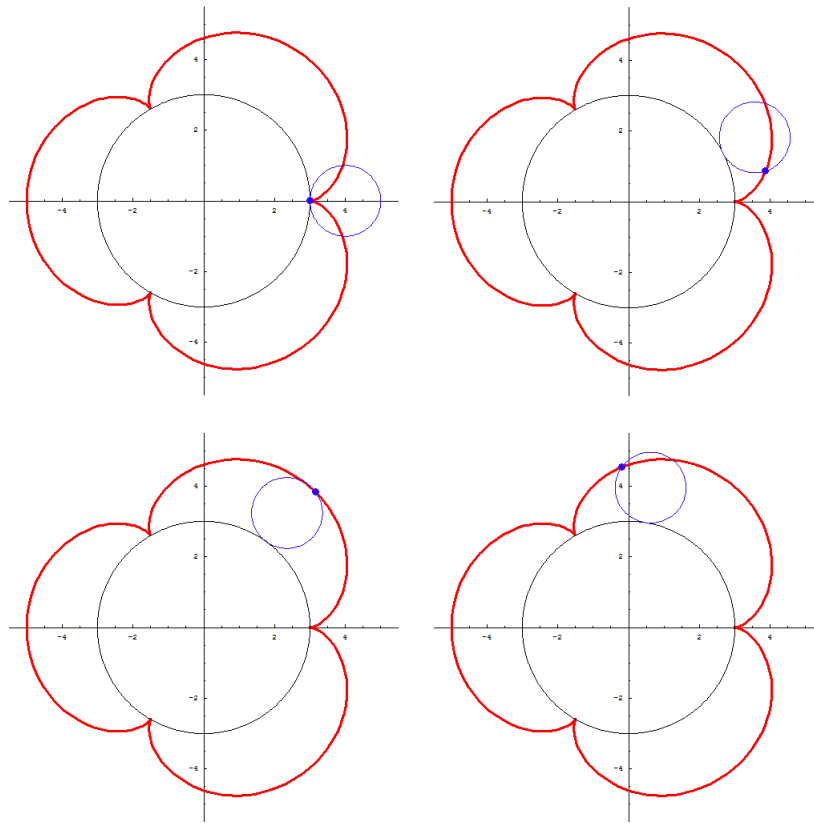


Caso $a > b$

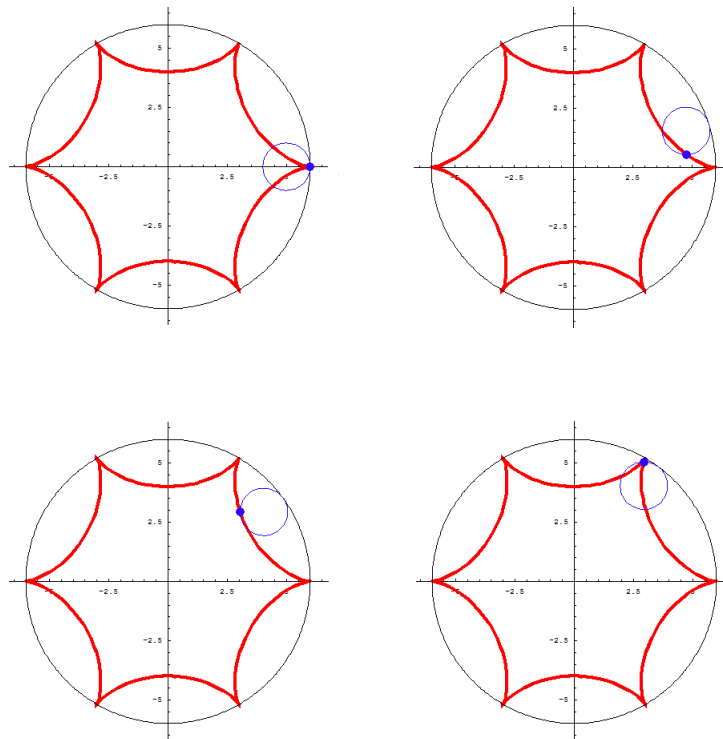


24. Determine uma parametrização da epicicloide (resp. hipocicloide), isto é, da curva plana descrita por um ponto numa circunferência de raio b que rola, sem escorregar, pela parte exterior (resp. interior) de uma outra circunferência de raio a .

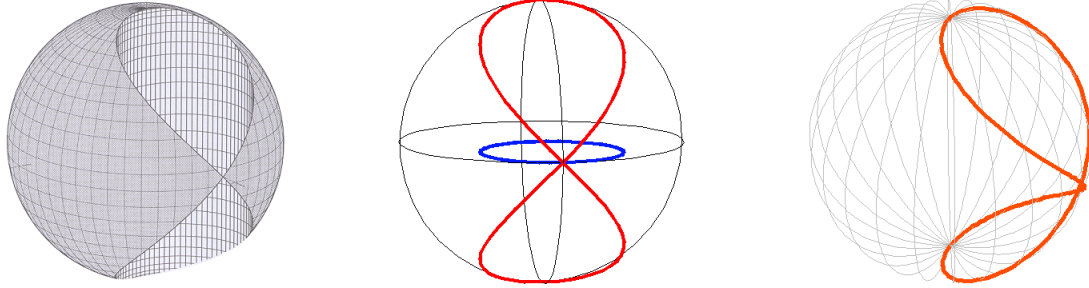
Epicicloide com 3 vértices



Hipociclóide com 6 vértices



25. Mostre que $\gamma(t) = (\cos^2 t - 1/2, \sin t \cos t, \sin t)$ é uma parametrização da curva de intersecção do cilindro circular, de raio $1/2$ e eixo OZ , com a esfera de raio 1 e centro $(-1/2, 0, 0)$ (chamada curva de Viviani).



3. Curvatura e torção; triedro de Frenet-Serret

- Determine as curvaturas das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$

(b) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$

(c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$

(d) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

No caso do astróide em (d), mostre que a curvatura tende para ∞ à medida que nos aproximamos dos pontos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Compare com a figura do Exercício 2.3.

- Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva (regular) parametrizada por comprimento de arco, esférica (isto é, cuja imagem está contida numa esfera). Prove que a curvatura de γ nunca se anula.
- Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Prove que

$$\kappa_\gamma(s) = |\gamma'_1(s)\gamma''_2(s) - \gamma''_1(s)\gamma'_2(s)|,$$

onde γ_1 e γ_2 denotam as funções componente de γ .

- Considere a hélice circular $\gamma_{r,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma_{r,a}(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$, r constante positiva e a constante não nula. Calcule a curvatura e a torção de qualquer reparametrização por comprimento de arco de $\gamma_{r,a}$.
- Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula e $\beta = \alpha \circ \lambda$ uma sua reparametrização. Prove que

$$\tau_\alpha(\lambda(t)) = [\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)] / \|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2.$$

- Calcule a curvatura e a torção da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.
- Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Mostre que $\kappa = \tau$.
- Prove que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco e calcule o seu triedro de Frenet-Serret:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = \left(\frac{5}{13} \cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13} \cos s \right)$;

(b) $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$.

- Calcule o triedro de Frenet-Serret das curvas:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (b) $\gamma(t) = (t - \cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
10. Determine τ, T, N, B para as curvas dos Exercícios 3.1 (a) e (b). Verifique que as fórmulas de Frenet-Serret são satisfeitas.
11. Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco e com curvatura constante. Prove que a curva α definida por $\alpha(s) = \int_0^s B_\gamma(u) du$ é uma curva de torção constante.
12. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa, \tau > 0$. Seja ainda $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tal que $\alpha'(s) = B_\gamma(s)$. Determine o triedro de Frenet-Serret, a curvatura e a torção de α .
13. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\gamma(t) = (te^{-t}, (t+1)e^{-t})$. Verifique se alguma das rectas tangentes de γ passa pelo ponto $(0, 0)$.
14. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1+t, -t^2, 1+t^3)$. Determine a recta tangente e o plano normal a γ em cada ponto $\gamma(t)$.
15. (a) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura é positiva. Prove que se todo o plano normal de γ passa por um ponto fixo então γ é esférica.
 (b) Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (-\cos 2t, -2\cos t, \sin 2t)$. Prove que γ é uma curva esférica, mostrando que todos os planos normais de γ passam pelo ponto $(-1, 0, 0)$.
16. Considere a hélice circular $\gamma_{r,a}$ do Exercício 3.4. Determine:
 (a) A recta binormal em cada ponto $\gamma_{r,a}(t)$;
 (b) O plano rectificante em $\gamma_{r,a}(t)$.
17. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas curvas não necessariamente parametrizadas por comprimento de arco e com curvaturas positivas. Diz-se que α e β são Curvas de Bertrand se, para cada $t \in I$, as rectas normal principal de α em $\alpha(t)$ e normal principal de β em $\beta(t)$ coincidem. Prove que:
 (a) $\|\alpha(t) - \beta(t)\|$ não depende de t ;
 (b) O ângulo formado pelos vectores $T_\alpha(t)$ e $T_\beta(t)$ não depende de t .
18. Considere a curva $\gamma_{a,b,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma_{a,b,c}(t) = (3at, 3bt^2, ct^3)$, onde a, b e c são constantes não nulas. Prove que:
 (a) A equação do plano osculador no ponto $\gamma_{a,b,c}(1)$ é $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;
 (b) A recta tangente a $\gamma_{a,b,c}$ no ponto $\gamma_{a,b,c}(t)$ intersecta o plano da alínea anterior no ponto $(a(2t+1), bt(t+2), ct^2)$.
19. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
 (a) Prove que o ângulo definido pelo vector binormal de γ em $\gamma(t)$ e pelo vector $(0, 0, a)$, $a \neq 0$, é constante.
 (b) Prove que a recta normal principal de γ em $\gamma(t)$ é paralela ao plano de equação $z = 0$ e intersecta o eixo OZ .
20. Sejam r, a, b, c constantes reais, com $r \neq 0$, e considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, a \sin t + b \cos t + c)$.
 (a) Prove que γ é uma curva plana.
 (b) Será possível que $\gamma(\mathbb{R})$ seja circular?

4. Curvas planas

1. Prove que a curva $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t})$ é plana.
2. Mostre que o traço da curva do Exercício 3.1(b) é uma circunferência, e determine o seu centro e o seu raio. Em que plano se encontra essa circunferência?
3. Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que o vector w que se obtém de v por uma rotação, no sentido positivo, de um ângulo recto, tem coordenadas $(-v_2, v_1)$.
4. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana e denote por γ_1 e γ_2 as respectivas funções componente. Prove que:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T(t) &= \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}} \right); \\ \text{(b)} \quad N_s(t) &= \left(-\frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}} \right); \\ \text{(c)} \quad \kappa_s(t) &= \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

5. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco e com curvatura positiva. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva não necessariamente parametrizada por comprimento de arco tal que, para cada $t \in I$, a recta tangente a α em $\alpha(t)$ é a recta normal a γ em $\gamma(t)$. Prove que, para cada $t \in I$,

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_\gamma(t)} N_\gamma(t).$$

6. Determine explicitamente uma curva plana parametrizada por comprimento de arco tal que:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \kappa_s(s) &= 2; \\ \text{(b)} \quad \kappa_s(s) &= s^{-1/2}; \\ \text{(c)} \quad \kappa_s(s) &= \frac{1}{s+a} \text{ (a constante);} \\ \text{(d)} \quad \kappa_s(s) &= \frac{a}{a+s^2} \text{ (a constante).} \end{aligned}$$

7. (a) Considere a espiral logaritmica $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma_a(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t)$, sendo a uma constante não nula. Mostre que existe uma única reparametrização por comprimento de arco

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a : J &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \tilde{\gamma}_a(s) \end{aligned}$$

tal que

- $J \subseteq (0, +\infty)$ e
- $s \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ (caso $a > 0$) ou $t \rightarrow +\infty$ (caso $a < 0$).

Determine a correspondente mudança de parâmetro, que ao parâmetro $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder o parâmetro $s \in J$, e mostre que a curvatura com sinal de γ_a é igual a $1/as$.

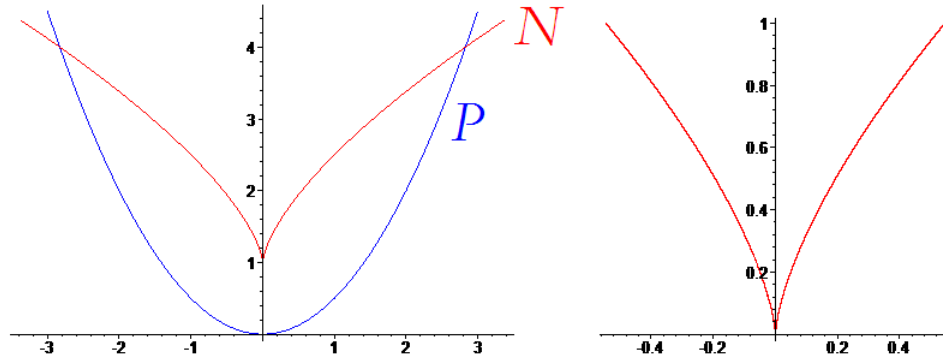
- (b) Descreva toda a curva cuja curvatura com sinal, como função do parâmetro s por comprimento de arco, é igual a $1/as$ para alguma constante não nula a .
8. Uma dada curva plana γ parametrizada por comprimento de arco tem a seguinte propriedade: o seu vector tangente $T(s)$ faz um ângulo constante θ com $\gamma(s)$, para todo o s . Mostre que:
 - (a) se $\theta = 0$ então o traço de γ é parte de uma linha recta;
 - (b) se $\theta = \pi/2$ então o traço de γ é uma circunferência;
 - (c) se $0 < \theta < \pi/2$ então o traço de γ é uma espiral logaritmica (exercício anterior).

9. Mostre que, aplicando uma reflexão (relativamente a uma recta) a uma curva plana, se altera o sinal da sua curvatura com sinal.
10. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, e seja c uma constante. A curva paralela γ^c é definida por $\gamma^c(t) = \gamma(t) + cN_s(t)$. Prove que, se $|c\kappa_s(t)| < 1$ para qualquer $t \in I$, então γ^c é uma curva regular e a sua curvatura com sinal é igual a $\kappa_s/(1 - c\kappa_s)$.
11. Seja γ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Define-se o centro de curvatura $\epsilon(s)$ de γ no ponto $\gamma(s)$ por

$$\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)}N_s(s).$$

Prove que a circunferência de centro $\epsilon(s)$ e raio $|1/\kappa_s(s)|$ é tangente a γ em $\gamma(s)$ e tem a mesma curvatura que γ nesse ponto. Esta circunferência chama-se circunferência osculadora de γ no ponto $\gamma(s)$. (Esboce a figura.)

12. Com a notação do exercício anterior, podemos olhar $\epsilon(s)$ como a parametrização de uma nova curva, chamada evoluta de γ (se γ não for parametrizada por comprimento de arco, a sua evoluta é definida como a evoluta de uma sua reparametrização por comprimento de arco).
- (a) Suponhamos que $\kappa'_s(s) > 0$ para cada s . Mostre que o comprimento de arco de ϵ é igual a $u_0 - \frac{1}{\kappa_s(s)}$, onde u_0 é uma constante, e determine a curvatura com sinal de ϵ .
- (b) Mostre que a evoluta da parábola $2y = x^2$ é a Curva de Neil, de equação $27x^2 = 8(y-1)^3$ (ou, parametricamente, dada por $\gamma(t) = (-t^2/3, \frac{2+3t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$).



- (c) Mostre que a evoluta do ciclóide $\gamma_a(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$, onde $a > 0$ é uma constante, é a curva definida por $\epsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$ (cf. Exercício 2.22) e que, após uma mudança de parâmetro adequada, ϵ pode ser obtida de γ por uma translação no plano.

5. Teorema fundamental das curvas

1. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$. Prove que $T_{\tilde{\gamma}}(s) = \mathcal{R}(T_{\gamma}(s))$ para qualquer $s \in I$, sendo $\tilde{\gamma}$ a curva $\mathcal{M} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. (a) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva esférica (contida numa esfera de raio r e centro c) parametrizada por comprimento de arco. Prove que:
- (i) A curvatura κ de γ nunca se anula;

(ii) Se a torção τ de γ nunca se anula então, para cada $s \in I$,

$$\gamma(s) - c = -\rho(s)N(s) - \rho'(s)\sigma(s)B(s)$$

e

$$r^2 = \rho(s)^2 + (\rho'(s)\sigma(s))^2,$$

onde $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$.

- (b) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s) \neq 0$ para cada $s \in I$. Definindo $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$, mostre que, se a função $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ é constante e $\rho' \not\equiv 0$, então γ é esférica. Qual é o raio dessa esfera?
- (c) Conclua que, sendo γ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$, então γ é esférica se e só se $\tau/\kappa \equiv (\kappa'/\tau\kappa^2)'$ (ou $\tau\rho \equiv -(\rho'/\tau)'$).

6. Hélices generalizadas

1. Mostre que qualquer hélice circular é uma hélice generalizada.
2. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Prove que as quatro condições seguintes são equivalentes:
 - (i) γ é uma hélice generalizada;
 - (ii) os vectores normais principais são paralelos a um determinado plano fixo;
 - (iii) os vectores binormais fazem um ângulo constante com uma determinada direcção fixa;
 - (iv) $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante.
3. Para quais $a \in \mathbb{R}$ a curva $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma_a(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, at^3)$, é uma hélice generalizada?
4. Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que a curva $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$ é uma hélice generalizada se e só se $4b^4 = 9a^2$ ou $a = 0$ ou $b = 0$. Qual é o seu eixo nesse caso?