

Superfícies em $\mathbb{R}^3$

2. Que é uma superfície?

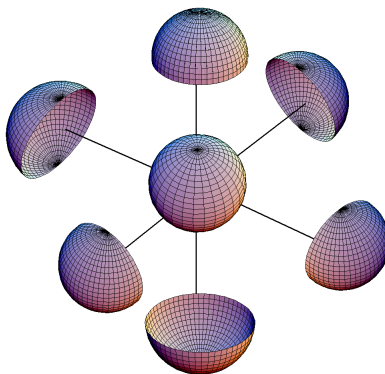
1. Defina parametrizações $\phi_+^x, \phi_-^x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a esfera

$$\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

resolvendo a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ relativamente a x (isto é,

$$\phi_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

definidas no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$). Defina $\phi_{\pm}^y$ e $\phi_{\pm}^z$ de modo análogo (com o mesmo U), resolvendo a equação relativamente a y e a z , respectivamente.



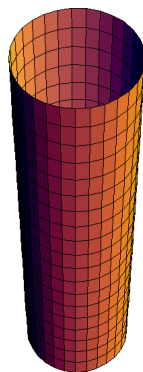
Mostre que estas 6 parametrizações asseguram que a esfera é uma superfície.

2. Considere a projecção estereográfica da esfera

$$\pi : \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que é definida do seguinte modo: para cada $p \in \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $\pi(p)$ é o ponto de $\mathbb{R}^2$ tal que $(\pi(p), 0)$ é o ponto de intersecção do plano $z = 0$ com a recta que contém os pontos $(0, 0, 1)$ e p . Determine a expressão analítica de π , e mostre que π é uma bijecção e que π^{-1} é uma parametrização de $\mathcal{S}^2$. Conclua que existem duas parametrizações de $\mathcal{S}^2$ cuja união cobre toda a esfera.

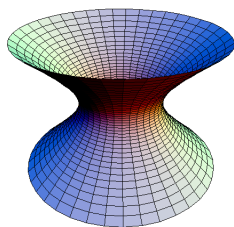
3. Mostre que o cilindro circular $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r \neq 0$, pode ser coberto por uma parametrização e, portanto, é uma superfície.



4. O hiperbolóide de uma folha é definido por $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Mostre que, para cada θ , a recta

$$(x - z) \cos \theta = (1 - y) \sin \theta, \quad (x + z) \sin \theta = (1 + y) \cos \theta$$

está contida em $\mathcal{H}$, e que todo o ponto do hiperbolóide pertence a uma destas rectas. Deduza que $\mathcal{H}$ pode ser coberta por duas parametrizações, e portanto que é uma superfície. (Compare com o caso do cilindro do Exercício 3.)



Determine uma segunda família de rectas em $\mathcal{H}$, e mostre que nenhum par de rectas da mesma família se intersecta, enquanto que qualquer recta da primeira família intersecta qualquer recta da segunda família com uma excepção.

5. Mostre que:

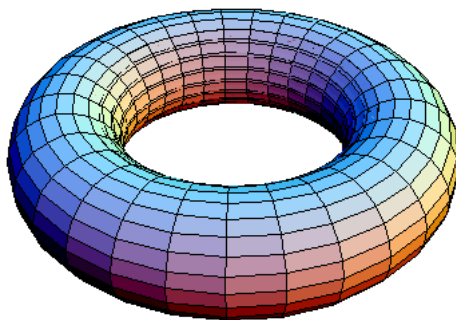
(a) O elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c \neq 0$) é uma superfície.

(b) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1\}$ é uma superfície.

6. Mostre que $\phi(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2)$ define uma parametrização da parte $z > 0$ do parabolóide hiperbólico $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

Fazendo uso da Proposição 2.2, determine outra parametrização $\tilde{\phi}$, e verifique que $\tilde{\phi}$ é uma reparametrização de ϕ . Determine as duas parametrizações análogas para a parte $z < 0$.

7. Recorde que um toro se obtém rodando uma circunferência $\mathcal{C}$, num plano Π , em torno de uma recta $\mathcal{L}$ (também em Π) que não intersecta $\mathcal{C}$. Considere para plano Π o plano XOZ e para $\mathcal{L}$ o eixo OZ e suponha a circunferência centrada no eixo OX . Seja ainda $a > 0$ a distância do centro de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{L}$, e $r < a$ o raio de $\mathcal{C}$.



Mostre, de dois modos distintos, que o toro é uma superfície, mostrando que:

- (a) tem um atlas consistindo nas parametrizações

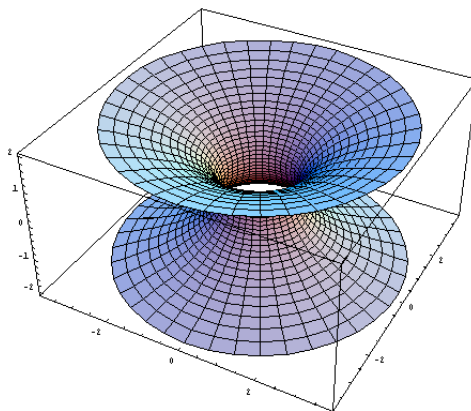
$$\sigma(u, v) = \left((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v \right),$$

com (u, v) pertencendo a adequados subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$;

- (b) é a superfície de nível dada por $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.
8. Para que valores de c se pode garantir que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z-2) + xy = c\}$ é uma superfície?
9. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2$. Prove que, apesar de 0 não ser valor regular de f , $f^{-1}(\{0\})$ é uma superfície.

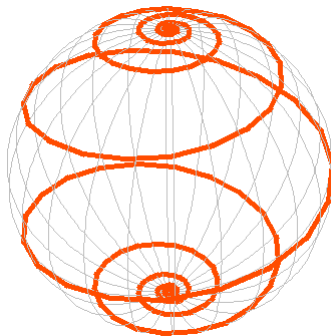
3. Classes especiais de superfícies

1. Determine um atlas para cada uma das superfícies quádricas (1)-(11) no Teorema 3.1 (note que, no caso (6), temos que remover a origem).
2. Mostre que a quádrica $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$ é uma superfície, exibindo um atlas.
3. Quais superfícies quádricas são regradas?
4. Uma *superfície de revolução* $\mathcal{R}$ é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma recta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução*. As circunferências obtidas por rotação de um ponto fixo da geratriz em torno do eixo de revolução chamam-se *paralelos* da superfície e as curvas na superfície obtidas por rotação da geratriz segundo um ângulo fixo chamam-se *meridianos*. Fixemos para eixo de revolução o eixo OZ e para plano da geratriz o plano OXZ . Cada ponto p de $\mathcal{R}$ é obtido por rotação, de ângulo v , de algum ponto q da geratriz.
- (a) Se $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ é uma parametrização da curva geratriz, mostre que o ponto p tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$.
- (b) Mostre que σ é regular se e só se γ é regular e não intersecta o eixo OZ .
- (c) Suponha que $f(u) > 0$ para qualquer u (ou seja, que γ está na metade $x > 0$ do plano OXZ). Verifique que σ é injectiva desde que γ não se auto intersecte e o ângulo de rotação v varie num intervalo aberto de amplitude $< 2\pi$.
- (d) Conclua que, nas condições de (b) e (c), σ permite formar um atlas de $\mathcal{R}$.
5. Quais superfícies quádricas são de revolução?
6. A superfície obtida rodando a curva $x = \cosh z$, no plano OXZ , em torno do eixo OZ , chama-se *catenóide*. Descreva um atlas para esta superfície.



7. Mostre que $\sigma(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$ define um mapa da esfera (a inversa σ^{-1} é chamada *projectão de Mercator*). Verifique que meridianos e paralelos na esfera correspondem, pela projectão de Mercator, a rectas ortogonais no plano.

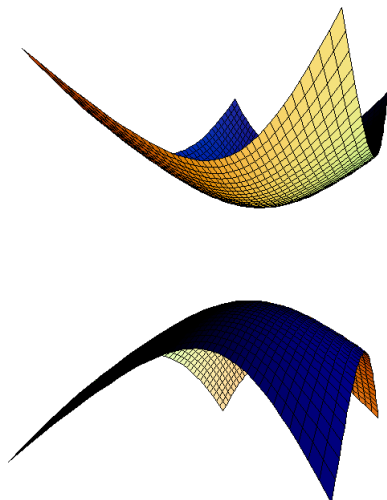
8. Uma *loxodromia* é uma curva na esfera unitária que intersecta os meridianos segundo um ângulo fixo α .



Mostre que no mapa de Mercator (exercício anterior) uma loxodromia $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, parametrizada por comprimento de arco, satisfaz $u'(t) = \cos \alpha \cosh u(t)$ e $v'(t) = \pm \sin \alpha \cosh u(t)$. Deduza que as loxodromias correspondem, pela projecção de Mercator, a rectas no plano.

4. Tangentes e normais; orientabilidade

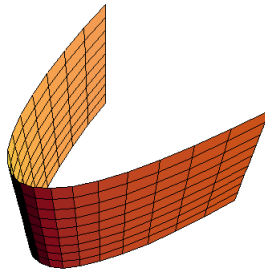
1. Considere o cone $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$. Prove, usando a definição, que se trata de uma superfície. Mostre que $\mathcal{S}$ tem o mesmo plano tangente nos pontos pertencentes à recta $x = 0, y = z$.
2. Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid yx^2 + y^2 = 1\}$.
 - (a) Justifique que C é uma superfície.
 - (b) Determine uma equação para o plano tangente a C em $p = (0, 1, 2)$.
3. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 y^2$.
 - (a) Determine o conjunto dos valores regulares de f .
 - (b) Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 y^2 = c\}$, $c \in \mathbb{R}^+$. Prove que qualquer plano tangente a $\mathcal{S}$ é paralelo à recta $x = 1, y = 2$.
4. Considere o hiperbolóide de duas folhas $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$.



(a) Justifique que $\mathcal{H}$ é uma superfície.

(b) Determine os pontos de $\mathcal{H}$ nos quais o plano tangente é paralelo ao eixo OZ .

5. Considere o *cilindro parabólico* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$.



(a) Prove que $\mathcal{S}$ é uma superfície que pode ser coberta por uma parametrização.

(b) Determine a recta normal a $\mathcal{S}$ em $(0, 0, 0)$.

6. Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{e^x}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)\}$. Determine uma equação para o plano tangente a $\mathcal{S}$ em $(0, 1, 1)$. Verifique se $(1, 1, 0)$ pertence à recta normal a $\mathcal{S}$ em $(0, 1, 1)$.

7. Considere o *cilindro elíptico* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1\}$, com $p, q \neq 0$, constantes.

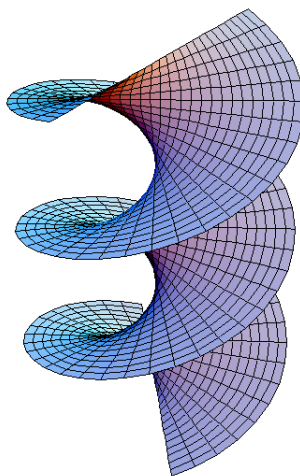
(a) Prove que o plano tangente a $\mathcal{S}$ nos pontos da recta

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0, \frac{x_0^2}{p^2} + \frac{y_0^2}{q^2} = 1\}$$

permanece constante.

(b) Mostre que qualquer normal a $\mathcal{S}$ é paralela ao plano de equação $z = 0$.

8. Um *helicóide* é a superfície descrita por uma hélice de avião quando, quer o avião quer a hélice, se movem com velocidade constante. Portanto, um helicóide é a superfície gerada por um segmento de recta, que roda a velocidade constante em torno de um eixo a ele perpendicular, enquanto simultaneamente se move ao longo desse eixo com velocidade constante.



Se o avião estiver a voar ao longo do eixo OZ , mostre que o helicóide pode ser parametrizado por $\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$, onde λ é uma constante. Mostre ainda que a co-tangente do ângulo que a normal unitária de ϕ num ponto P faz com o eixo OZ é proporcional à distância de P ao eixo.

9. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t))$ e $\gamma_1(t) > 0$, uma curva plana com velocidade constante e seja S a superfície de revolução obtida rodando γ em torno do eixo OZ . Considere ainda:

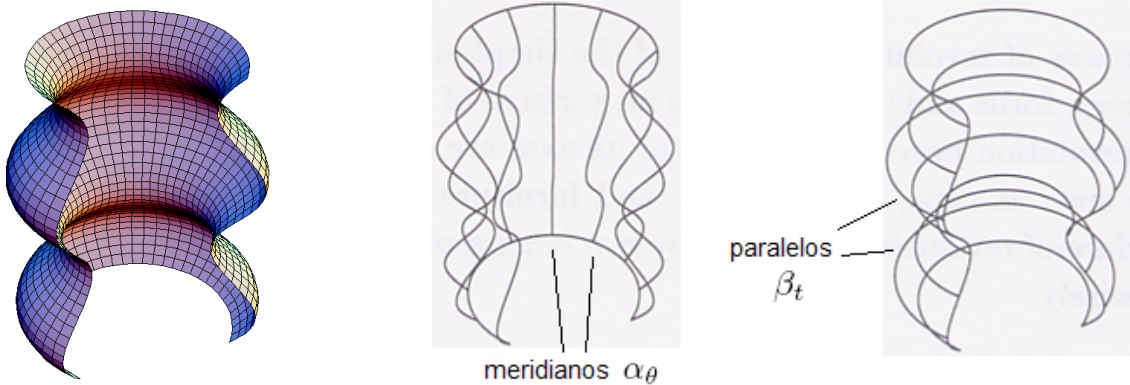
- para cada $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha_\theta : I &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_1(t) \sin \theta, \gamma_3(t)); \end{aligned}$$

- para cada $t \in J$,

$$\begin{aligned} \beta_t : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ \theta &\longmapsto (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_1(t) \sin \theta, \gamma_3(t)). \end{aligned}$$

As curvas α_θ chamam-se *meridianos* de S e as circunferências β_t chamam-se *paralelos* de S :



- Mostre que os meridianos e os paralelos se intersectam sempre ortogonalmente, isto é, $(\alpha'_\theta(t) \mid \beta'_t(\theta)) = 0$ para quaisquer $t \in I$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- Sabendo que uma *geodésica* de uma superfície S é uma curva $\gamma : J \rightarrow S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^\perp$ para todo o $t \in J$, prove que:
 - Cada meridiano α_θ é uma geodésica da superfície de revolução S acima definida.
 - Um paralelo β_t é uma geodésica se e só se $\gamma'_1(t) = 0$.

5. Primeira forma fundamental

1. Calcule a primeira forma fundamental dos seguintes mapas:

- $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$;
- $\sigma(u, v) = (\cosh u, \sinh u, v)$;
- $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

2. Seja $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow S$ uma reparametrização de um mapa $\sigma : U \rightarrow S$ da superfície S . Prove que

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J$$

onde J é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas Φ , e $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ e E, F, G são, respectivamente, os coeficientes da primeira forma fundamental de $\tilde{\sigma}$ e σ .

3. A aplicação da metade do cone circular $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, no plano OXY , dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, é uma isometria?

4. Mostre que o *cone circular*, parametrizado por $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, pode ser “desenrolado” no plano, isto é, é isométrico a parte de um plano (XOY , por exemplo), através do difeomorfismo

$$f : \sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(u, v) = \left(u\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Descreva que parte do plano XOY é isométrica ao cone e verifique que f é de facto uma isometria.

5. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \Pi \\ (x, y, z) &\mapsto (\sigma^{-1}(x, y, z), 0), \end{aligned}$$

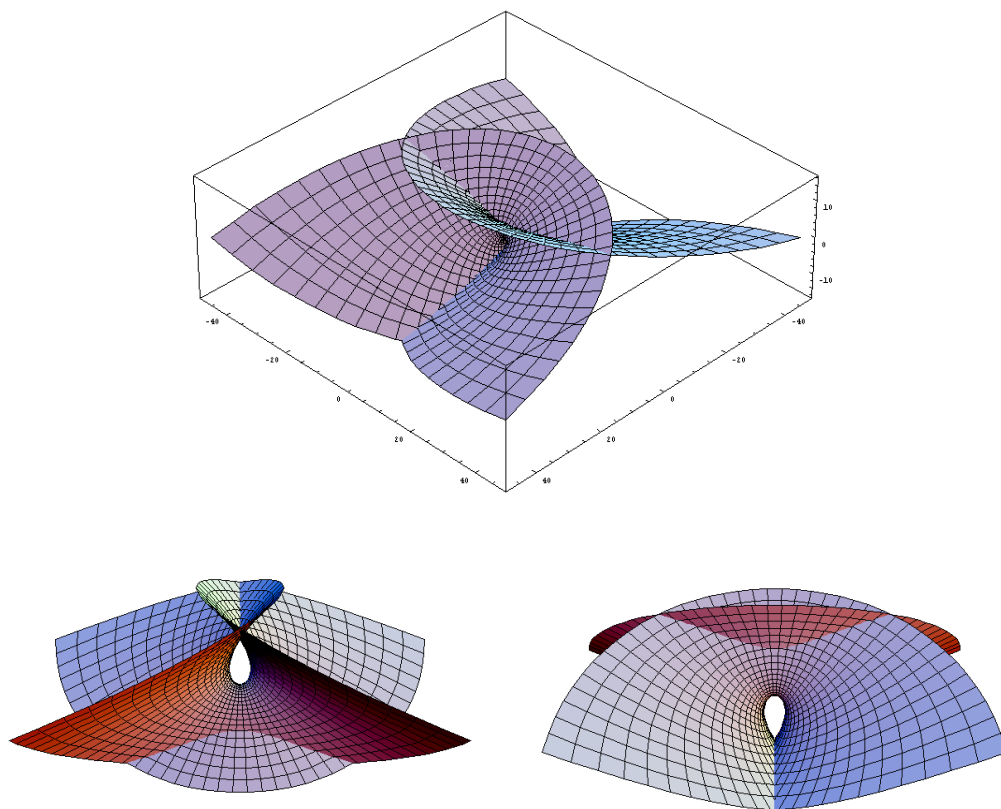
na superfície plana $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$, é conformal. Mostre que:

(a) O mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

(b) O mapa

$$\sigma(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, y - \frac{y^3}{3} + x^2y, x^2 - y^2 \right)$$

da *Superfície de Enneper*



é conformal.

[Em rigor, σ não é uma parametrização de uma superfície (no sentido da Definição 2.1) pois *não* é injectiva, como as auto-intersecções na figura claramente mostram. No entanto, se restringirmos (x, y) a abertos suficientemente pequenos, σ será injectiva pelo Teorema da Função Inversa.]

6. Prove que o mapa de Mercator da esfera (Exercício 4.7) é conformal.
7. (a) Prove que qualquer isometria é uma aplicação conformal. Mostre que a projecção estereográfica é um exemplo de um difeomorfismo conformal que não é uma isometria.

(b) Prove que qualquer isometria é uma aplicação equiareal.

Mostre que a projecção de Arquimedes é um exemplo de um difeomorfismo equiareal que não é uma isometria.

8. Prove que um difeomorfismo é uma isometria se e só se é conformal e equiareal.

9. Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e seja $g : S_1 \rightarrow S_2$ definida por

$$g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z).$$

(a) Prove que g é uma isometria.

(b) Sabendo que o caminho mais curto em S_2 entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4)$ define uma curva (regular) determine:

- (i) o comprimento desse caminho;
- (ii) esse caminho.

(c) Determine a área do triângulo em S_2 de vértices $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, 1, 2)$.

10. Uma *circunferência máxima* numa esfera é uma circunferência obtida intersectando a esfera com um plano passando pelo seu centro.

(a) Prove que o caminho mais curto entre dois pontos numa esfera é um arco de circunferência máxima.

(b) O que diz a Fórmula de Girard sobre a área de um triângulo esférico?

(c) Um velejador pretende circum-navegar a Austrália, seguindo a rota triangular mais curta possível. Prove que um dos ângulos do triângulo mede, pelo menos, $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{16}$ radianos. (Assuma que a terra é uma esfera de raio $6400Km$ e que a área da Austrália mede $7680000Km^2$.)

11. Suponha a esfera unitária coberta por F triângulos cujos lados são arcos de circunferência máxima, e tais que a intersecção de quaisquer dois triângulos é vazia ou é um vértice ou uma aresta comum aos dois triângulos. Denote por E o número total de arestas nessa cobertura e por V o número de vértices.

(a) Mostre que $3F = 2E$.

(b) Deduza, usando a Fórmula de Girard, que $2V - F = 4$.

(c) Conclua que $V - E + F = 2$ (a chamada *Fórmula de Euler*).

6. Aplicação de Gauss e segunda forma fundamental

1. Seja $S = G_f$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$K(x, y) = \frac{\det H(x, y)}{(1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2)^2},$$

onde

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

é a *matriz hessiana* de f em (x, y) (ou seja, a matriz das derivadas parciais de segunda ordem da função f).

2. (a) Prove que todos os pontos de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ são elípticos.
 (b) Prove que todos os pontos de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ são hiperbólicos.
 (c) Prove que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + y^3\}$ contém pontos de qualquer um dos quatro tipos, determinando-os.
3. Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^∞ , considere a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x) + g(y). \end{aligned}$$

Calcule as duas formas fundamentais e classifique os pontos do gráfico de h relacionando, quando possível, a sua natureza com o sentido da concavidade das funções f e g .

4. Considere a superfície de revolução, com eixo de revolução OZ , parametrizada por

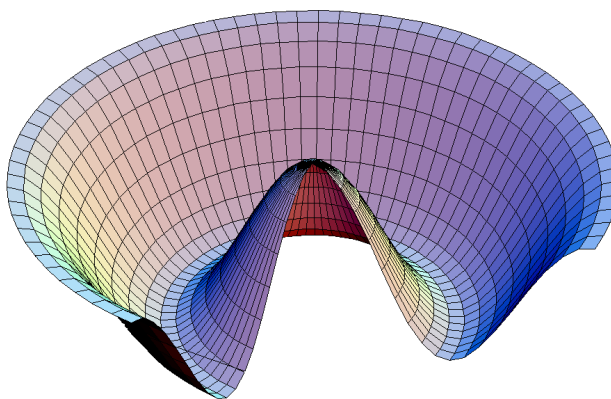
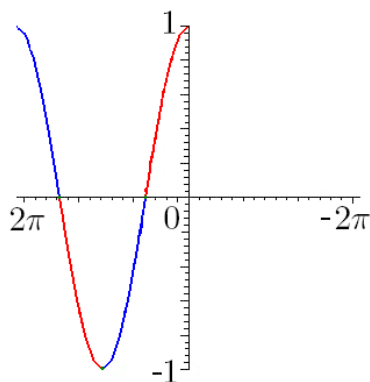
$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $v \in (0, 2\pi)$, $u \in I$ e f é uma função positiva.

- (a) Determine a segunda forma fundamental da parametrização σ .
 (b) Quando é que a geratriz $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ está parametrizada por comprimento de arco?
 (c) Se a geratriz γ está parametrizada por comprimento de arco, mostre que

$$K(u, v) = -f''(u)/f(u).$$

- (d) Determine as geratrizes γ , parametrizadas por comprimento de arco, cujas superfícies de revolução tenham curvatura gaussiana constante igual a 4 (resp. -4).
5. Seja S a superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana $z = \cos x$, $x \in (0, 2\pi)$, em torno do eixo OZ . Determine os pontos da curva que dão origem, respectivamente, aos pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos de S .



(Gráfico da geratriz $z = \cos x$, $x \in (0, 2\pi)$, e parte da respectiva superfície de revolução S)

6. Seja S a superfície de revolução do Exercício 4 e suponha que a geratriz γ está parametrizada por comprimento de arco. Prove que S é parte de um cilindro circular ou de um cone circular se e só se todo o ponto de S é parabólico.
7. Considere o toro T com o mapa

$$\sigma(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

- (a) Mostre que a curvatura gaussiana e média no ponto $p = \sigma(u, v)$ são dadas por, respectivamente,

$$K(p) = \frac{\cos v}{2 + \cos v} \text{ e } H(p) = \frac{1 + \cos v}{2 + \cos v}.$$

- (b) Prove que T não contém pontos planares e determine os seus pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos.

- (c) Diz-se que um ponto p de uma superfície é *umbílico* se as curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são iguais. O toro T possui pontos umbílicos?

8. Sendo $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ ($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) um polinómio arbitrário de grau 2 nas duas variáveis x e y , considere

$$S_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = p(x, y)\}.$$

- (a) Mostre que S_p é uma superfície.

- (b) Prove que, para cada p , todos os pontos de S_p são elípticos ou todos os pontos de S_p são hiperbólicos ou todos os pontos de S_p são planares ou parabólicos.

Para que polinómios p é que os pontos de S_p são todos elípticos? E hiperbólicos?