

1. Seja $S = f^{-1}(a)$ uma superfície, onde $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , e seja p um ponto de S .

- (a) Prove que o gradiente $\nabla f(p)$ de f em p é ortogonal ao plano tangente a S em p .
- (b) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 = 1\}$. Determine o plano tangente a S no ponto $p = (1, 1, 0)$.

2. Quando é que um difeomorfismo $f: S_1 \rightarrow S_2$ entre superfícies se diz uma isometria?

3. Considere a superfície cilíndrica $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x \neq -1\}$, parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma: \quad (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos u, \sin u, v), \end{aligned}$$

e a superfície plana $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y \in (-\pi, \pi)\}$.

Seja $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$ o difeomorfismo definido por $\sigma(u, v) \mapsto (1, u, v)$.

- (a) Mostre que f é uma isometria.
- (b) Determine a distância, em $\mathcal{C}$, entre os pontos $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)$ e $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)$.
4. Como se classificam os pontos de uma superfície relativamente às curvaturas gaussiana e média?
5. Considere uma superfície de revolução S parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma: \quad (0, 2\pi) \times I &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \end{aligned}$$

onde a curva geratriz $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $v \mapsto (f(v), 0, g(v))$ está parametrizada por comprimento de arco (ou seja, $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$ para qualquer $v \in I$).

- (a) Calcule a primeira forma fundamental de σ .
- (b) Determine um campo de vectores normais unitários de S .
- (c) Determine a segunda forma fundamental de σ .
- (d) Tome para geratriz de S a curva $\gamma: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(v) = 2 + \cos v$ e $g(v) = \sin v$.
- (i) Determine neste caso as curvaturas gaussiana e média de qualquer $p \in S$.
- (ii) Classifique os pontos de S , indicando os valores de u e v nos quais o ponto $p = \sigma(u, v)$ é elíptico, hiperbólico, parabólico ou planar.