

SOLUÇÕES

1. (a) Para cada mapa $\sigma: V \rightarrow W \subseteq S$, a composição $f \circ \sigma$ é constante, pois $f(\sigma(x)) = a$ para qualquer $x \in V$. Logo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = J_f(p) \cdot J_\sigma(q)$$

para cada $p = \sigma(q) \in W$. Consequentemente, como $J_f(p) = \nabla_f(p)$, então

$$(\nabla_f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)) = 0 \text{ e } (\nabla_f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)) = 0.$$

Portanto, como o plano tangente a S em p tem a direção dos vetores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$, será ortogonal a $\nabla_f(p)$.

- (b) O gradiente de f num ponto genérico (x, y, z) de S é igual a

$$(2xy^2 + 2xz^2, 2yx^2 + 2yz^2, 2zx^2 + 2zy^2)$$

pelo que em $p = (1, 1, 0)$ é o vetor $(2, 2, 0)$. Como, pela alínea anterior, o plano tangente a S em $p = (1, 1, 0)$ é o plano que passa por p e é ortogonal ao gradiente de f em p , então

$$\begin{aligned} \Pi_p^S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y, z) - (1, 1, 0) \mid \nabla_f(p)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x - 1, y - 1, z) \mid (2, 2, 0)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x - 1) + 2(y - 1) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2\}. \end{aligned}$$

2. Um difeomorfismo $f: S_1 \rightarrow S_2$ diz-se uma *isometria* quando, para cada curva $\gamma: [a, b] \rightarrow S_1$ em S_1 , a curva $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow S_2$ tem comprimento igual ao de γ .

Como provámos nas aulas, um difeomorfismo $f: S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada mapa σ_1 de um atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são idênticas.

3. (a) O mapa σ constitui um atlas de $\mathcal{C}$ e a sua primeira forma fundamental é a matriz identidade. De facto:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1),$$

donde

$$E(u, v) = ((-\sin u, \cos u, 0) \mid (-\sin u, \cos u, 0)) = 1,$$

$$F(u, v) = ((0, 0, 1) \mid (-\sin u, \cos u, 0)) = 0,$$

$$G(u, v) = ((0, 0, 1) \mid (0, 0, 1)) = 1.$$

Por outro lado, $(f \circ \sigma)(u, v) = (1, v, u)$ tem também como primeira forma fundamental a matriz identidade.

Portanto, pelo teorema estudado nas aulas (acima enunciado), f é uma isometria.

(b) Sejam

$$A' = f(A) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) = f\left(\sigma\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)\right) = \left(1, -\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)$$

e

$$B' = f(B) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = f\left(\sigma\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)\right) = \left(1, -\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right).$$

Como f é uma isometria, o comprimento do caminho mais curto em $\mathcal{C}$ entre os pontos A e B é igual à distância de A' a B' na superfície plana $\mathcal{P}$, isto é, a

$$\begin{aligned}\|B' - A'\| &= \left\| \left(1, -\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) - \left(1, -\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) \right\| = \left\| \left(0, \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) \right\| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{3\pi^2}{12^2}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

4. Um ponto $p \in S$ diz-se

- *elíptico*, se $K(p) > 0$.
- *hiperbólico*, se $K(p) < 0$.
- *parabólico*, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$.
- *planar*, se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$.

5. (a) Como $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$ então

$$\begin{aligned}E(u, v) &= f(v)^2 \sin^2 u + f(v)^2 \cos^2 u = f(v)^2, \\ F(u, v) &= -f(v)f'(v) \sin u \cos u + f(v)f'(v) \sin u \cos u = 0, \\ G(u, v) &= f'(v)^2 \cos^2 u + f'(v)^2 \sin^2 u + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1.\end{aligned}$$

Portanto a primeira forma fundamental de σ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= (f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, -f(v)f'(v) \sin^2 u - f(v)f'(v) \cos^2 u) \\ &= (f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, -f(v)f'(v))\end{aligned}$$

então

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{(f(v)g'(v))^2 + (f(v)g'(v))^2} = \sqrt{f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2)} = f(v)$$

(na construção de superfícies de revolução que fizemos nas aulas, assumimos sempre que a geratriz γ está no semiplano positivo $X > 0$ do plano XOZ , pelo que $f(v) > 0$ sempre).

Portanto

$$\begin{aligned}N(u, v) &= \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} = \frac{(f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, -f(v)f'(v))}{f(v)} \\ &= (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v)).\end{aligned}$$

(c) É a matriz

$$\begin{bmatrix} e(u, v) & f(u, v) \\ f(u, v) & g(u, v) \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
e(u, v) &= -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} \mid N(u, v)\right) \\
&= -\left((-f(v) \cos u, -f(v) \sin u, 0) \mid (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v))\right) = f(v)g'(v), \\
f(u, v) &= -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v} \mid N(u, v)\right) \\
&= -\left((-f'(v) \sin u, f'(v) \cos u, 0) \mid (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v))\right) = 0, \\
g(u, v) &= -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2} \mid N(u, v)\right) \\
&= -\left((f''(v) \cos u, f''(v) \sin u, g''(v)) \mid (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v))\right) \\
&= -f''(v)g'(v) + f'(v)g''(v).
\end{aligned}$$

(d) (i) Das álneas (a) e (d) sabemos que

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= f(v)^2 = (2 + \cos v)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1, \\
e(u, v) &= f(v)g'(v) = (2 + \cos v) \cos v, \quad f(u, v) = 0, \\
g(u, v) &= -f''(v)g'(v) + f'(v)g''(v) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(2 + \cos v) \cos v}{(2 + \cos v)^2} = \frac{\cos v}{2 + \cos v}$$

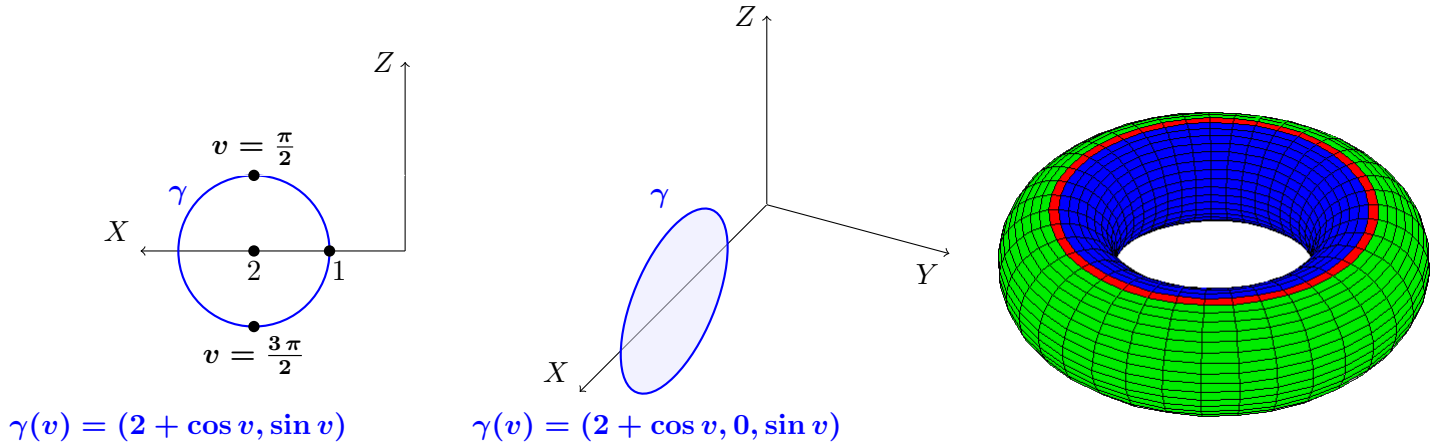
e

$$H(p) = \frac{Eg - 2fF + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{(2 + \cos v)^2 + (2 + \cos v) \cos v}{2(2 + \cos v)^2} = \frac{(2 + \cos v) + \cos v}{2(2 + \cos v)} = \frac{1 + \cos v}{2 + \cos v}.$$

(d) (ii) Em conclusão, usando a resposta à questão 4, obtemos:

elíptico	$K(p) > 0$	$\cos v > 0$	$v \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), u \in (0, 2\pi)$
hiperbólico	$K(p) < 0$	$\cos v < 0$	$v \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), u \in (0, 2\pi)$
parabólico	$K(p) = 0, H(p) \neq 0$	$\cos v = 0$	$v \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, u \in (0, 2\pi)$
planar	$K(p) = 0 = H(p)$	impossível	

Representando graficamente:



(Os pontos elípticos estão marcados a verde, os pontos hiperbólicos, a azul, e os pontos parabólicos, a vermelho. Existem duas circunferências ao longo dos quais os pontos são parabólicos; na figura acima só se vê uma dessas circunferências: $v = \frac{\pi}{2}$)