

1. Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Indique quando é que $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 0$ e quando é que $(\vec{x} \wedge \vec{y}) = 0$.

Resposta: Sendo $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$, então

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \quad \text{e} \quad (\vec{x} \wedge \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \text{ é paralelo a } \vec{y}.$$

(Porque $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$ e $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$.)

2. Considere a curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, definida por

$$\gamma(s) = \left(\frac{5}{13} \cos s, -\frac{12}{13} \cos s, 1 - \sin s \right).$$

Determine:

- (a) O vetor tangente $T(s)$ e a curvatura $\kappa(s)$ de γ .
 (b) A reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$. Esboce um desenho da reta em $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

(a) $T(s) = \gamma'(s) = \left(-\frac{5}{13} \sin s, \frac{12}{13} \sin s, -\cos s \right).$

Por outro lado, $\gamma''(s) = \left(-\frac{5}{13} \cos s, \frac{12}{13} \cos s, \sin s \right)$, logo

$$\|\gamma''(s)\|^2 = \left(\left(\frac{5}{13} \right)^2 + \left(\frac{12}{13} \right)^2 \right) \cos^2 s + \sin^2 s = \cos^2 s + \sin^2 s = 1$$

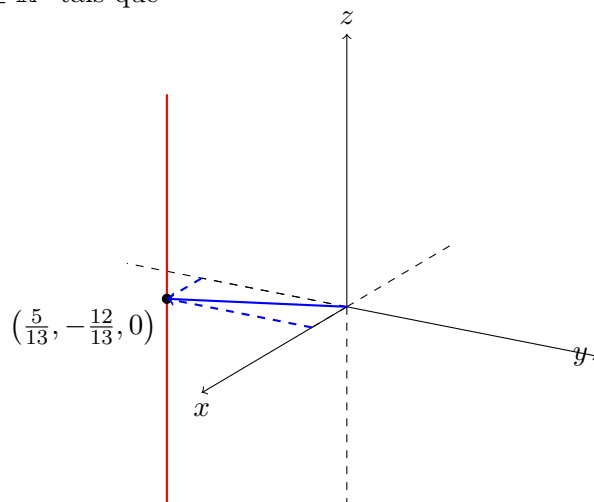
pelo que $k(s) = \|\gamma''(s)\| = 1$.

- (b) É a reta que passa pelo ponto $\gamma(0) = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}, 1 \right)$ e tem a direção do vector $\gamma'(0) = (0, 0, -1)$. A sua equação vetorial é

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}: P = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}, 1 \right) + \lambda(0, 0, -1)\}.$$

Portanto é o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} x = \frac{5}{13} \\ y = -\frac{12}{13} \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



3. Seja $\gamma: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$.

(a) Mostre que γ tem comprimento $\sqrt{3}e$.

(b) Determine uma reparametrização por comprimento de arco de γ .

Resposta:

(a) Como

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, -e^{-t}) \\ &= -e^{-t}(\cos t + \sin t, \sin t - \cos t, 1)\end{aligned}$$

então

$$\|\gamma'(t)\|^2 = e^{-t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t + 1) = 3e^{-t}.$$

Portanto

$$s(t) = \int_{-1}^t \|\gamma'(u)\| du = \int_{-1}^t \sqrt{3} e^{-u} du = \sqrt{3} [-e^{-u}]_{-1}^t = \sqrt{3} (-e^{-t} + e),$$

pelo que o comprimento de γ no seu domínio $[-1, +\infty)$ é igual a $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \sqrt{3}e$.

(b) Para reparametrizar γ por comprimento de arco, e aproveitando os cálculos já feitos na alínea anterior, podemos considerar a função bijectiva $s: [-1, +\infty) \rightarrow s([-1, +\infty))$ definida por

$$s(t) = \int_{-1}^t \|\gamma'(u)\| du = \sqrt{3}(e - e^{-t})$$

e determinar a sua função inversa

$$s^{-1}: s([-1, +\infty)) = [0, \sqrt{3}e) \longrightarrow [-1, +\infty),$$

o que não é difícil:

$$s(t) = \sqrt{3}(e - e^{-t}) = u \Leftrightarrow e^{-t} = e - \frac{u}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = -\ln(e - \frac{u}{\sqrt{3}})$$

pelo que $s^{-1}(u) = -\ln(e - \frac{u}{\sqrt{3}})$. A reparametrização por comprimento de arco será então a curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}: [0, \sqrt{3}e) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\tilde{\gamma}(u) = \left((e - \frac{u}{\sqrt{3}}) \cos(-\ln(e - \frac{u}{\sqrt{3}})), (e - \frac{u}{\sqrt{3}}) \sin(-\ln(e - \frac{u}{\sqrt{3}})), e - \frac{u}{\sqrt{3}} \right).$$
