

Soluções

1. Basta verificar que $(\gamma_1(t) - 1)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1$ e $\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 + \gamma_3(t)^2 = 4$ para todo o $t \in [0, 4\pi]$:

$$(\gamma_1(t) - 1)^2 + \gamma_2(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 + \gamma_3(t)^2 &= (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

2. (a) **FALSA:**

A curva γ é plana se e só se a sua torção $\tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$ for nula em todos os pontos. Mas

$$\begin{aligned} [\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] &= \left((1, 2t, 3t^2) \wedge (0, 2, 6t) \mid (0, 0, 6) \right) \\ &= \left((\dots, \dots, 2) \mid (0, 0, 6) \right) = 12 \neq 0 \end{aligned}$$

pelo que γ não é plana.

- (b) **VERDADEIRA:**

A curva está parametrizada por comprimento de arco: para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(t)\| = \|(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t)\| = 1$. Assim,

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s)\| = 1.$$

Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{4}{5} \sin s & -\cos s & \frac{3}{5} \sin s \\ -\frac{4}{5} \cos s & \sin s & \frac{3}{5} \cos s \end{vmatrix} &= \left(-\frac{3}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{4}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s) \right) \\ &= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right). \end{aligned}$$

Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, pelo que a curva é plana. Como a curvatura é constante, igual a 1, sabemos pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas que terá que ser uma circunferência de raio 1.

(c) **VERDADEIRA:**

Como $\beta(t) = \alpha'(t)$ e α está parametrizada por comprimento de arco, então $\beta(t) = T_\alpha(t)$. Consequentemente, pelas fórmulas de Frenet-Serret, $\beta'(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t)$ e

$$\begin{aligned}\beta''(t) &= \kappa'_\alpha(t) N_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t) N'_\alpha(t) \\ &= \kappa'_\alpha(t) N_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t) (-\kappa_\alpha(t) T_\alpha(t) + \tau_\alpha(t) B_\alpha(t)) \\ &= -\kappa_\alpha(t)^2 T_\alpha(t) + \kappa'_\alpha(t) N_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t) \tau_\alpha(t) B_\alpha(t).\end{aligned}$$

(d) **FALSA:**

O gradiente $\nabla_f(x, y, z)$ de f no ponto (x, y, z) é o vector $(2x, 2y, -2z)$, que se anula exatamente no ponto $(0, 0, 0)$. No entanto, este ponto pertence a $f^{-1}(\{0\})$.

(e) **VERDADEIRA:**

Seja

$$f: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. É evidente que o domínio de f é um aberto de $\mathbb{R}^3$ e que $C = f^{-1}(\{0\})$. Pela alínea anterior, o gradiente $\nabla_f(x, y, z)$ de f anula-se exatamente no ponto $(0, 0, 0)$. Mas agora este ponto não pertence a $f^{-1}(\{0\})$, pelo que 0 é um valor regular de f . Logo $C = f^{-1}(\{0\})$ é uma superfície.
