Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Curvas e Superfícies**

*Duração: 1h15m* **Teste 1A** 16/03/2012

**Soluções**

---

*O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).*

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$ se e só se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são linearmente independentes. | | $\times$ |

   [Sendo $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$, então $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$. Portanto, todos os pares de vectores $\vec{x}, \vec{y}$ não ortogonais e não paralelos são exemplos de vectores linearmente independentes para os quais $(\vec{x} \mid \vec{y}) \neq 0$. Por exemplo, $\vec{x} = (0, 1, 0)$ e $\vec{y} = (0, 1, 1)$ são linearmente independentes mas $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 1 \neq 0$.]

   (b) Uma reparametrização de uma curva regular pode não ser regular. | | $\times$ |

   [Pela Proposição 2.9, toda a reparametrização de uma curva regular é regular: $\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma \circ \lambda)'(t) = \lambda'(t) \cdot \gamma'(\lambda(t)) \neq 0$.]

   (c) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$. | $\times$ | |

   [Como $\gamma'(t) = (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)$, então $\|\gamma'(t)\|^2 = e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t}$. Portanto, $\int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{2}e^{-u} \, du = \sqrt{2}[-e^{-u}]_0^t = \sqrt{2}(-e^{-t} + 1)$, pelo que $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = \sqrt{2}$.]

2. Seja $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$. Reparametrize-a, por comprimento de arco.

   $\gamma$ não está parametrizada por comprimento de arco pois $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{3}\, e^t$. Para reparametrizar $\gamma$ por comprimento de arco temos que considerar a função bijectiva $s \colon \mathbb{R} \to s(\mathbb{R})$ definida por

   $$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{3}\, e^u \, du = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

   e determinar a sua função inversa $s^{-1} \colon s(\mathbb{R}) = (-\sqrt{3}, +\infty) \to \mathbb{R}$, o que não é difícil:

   $$s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1) = u \Leftrightarrow e^t = \frac{u}{\sqrt{3}} + 1 \Leftrightarrow t = \ln(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)$$

pelo que $s^{-1}(u) = \ln(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)$. A reparametrização por comprimento de arco será então a curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1} \colon (-\sqrt{3}, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\gamma}(u) = \Big( (\frac{u}{\sqrt{3}} + 1) \cos(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)), (\frac{u}{\sqrt{3}} + 1) \sin(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)), \frac{u}{\sqrt{3}} + 1 \Big).$$

3. (a) A curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(s) = (\frac{5}{13}\cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s)$ está parametrizada por comprimento de arco?

Sim: $\gamma'(s) = (-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s)$ donde

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \Big( (\frac{5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2 \Big) \sin^2 s + \cos^2 s = \sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a sua curvatura e a sua torsão.

Como $\gamma''(s) = (-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s)$, então $k(s) = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s} = 1$. Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{5}{13}\sin s & -\cos s & \frac{12}{13}\sin s \\ -\frac{5}{13}\cos s & \sin s & \frac{12}{13}\cos s \end{vmatrix} &= \Big( -\frac{12}{13}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{5}{13}(\cos^2 s + \sin^2 s) \Big) \\ &= \Big( -\frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13} \Big). \end{aligned}$$

Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.