Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Curvas e Superfícies**

Duração: 1h15m **Teste 1B** 16/03/2012

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para quaisquer $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, $\vec{x}\wedge\vec{y}=0$ se e só se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são ortogonais. [ ] [×]

   `[Sendo` $\vec{x},\vec{y}\neq 0$, `então` $\vec{x}\wedge\vec{y}=0\Leftrightarrow \sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})=0\Leftrightarrow \vec{x}\|\vec{y}$`.]`

   (b) A curva $\gamma_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $t\mapsto(1,at^2,t^3)$, é regular para qualquer $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. [ ] [×]

   `[`$\gamma_a'(t)=(0,2at,3t^2)$ `pelo que` $\gamma_a'(0)=(0,0,0)$`.]`

   (c) A curvatura de uma circunferência é inversamente proporcional ao seu raio. [×] [ ]

   `[`$\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$ `é uma parametrização da circunferência de raio` r`, pelo que a sua curvatura é igual a`

   $$k(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\|(0,0,r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t)\|}{r^3}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}.]$$

2. Seja $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ a curva dada por $\gamma(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$. Reparametrize-a, por comprimento de arco.

   γ não está parametrizada por comprimento de arco pois $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{3}\,e^t$. Para reparametrizar γ por comprimento de arco temos que considerar a função bijectiva $s\colon\mathbb{R}\to s(\mathbb{R})$ definida por

   $$s(t)=\int_0^t\|\gamma'(u)\|\,du=\int_0^t\sqrt{3}\,e^u\,du=\sqrt{3}(e^t-1)$$

   e determinar a sua função inversa $s^{-1}\colon s(\mathbb{R})=(-\sqrt{3},+\infty)\to\mathbb{R}$, o que não é difícil:

   $$s(t)=\sqrt{3}(e^t-1)=u\Leftrightarrow e^t=\frac{u}{\sqrt{3}}+1\Leftrightarrow t=\ln(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)$$

   pelo que $s^{-1}(u)=\ln(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)$. A reparametrização por comprimento de arco será então a curva $\tilde{\gamma}=\gamma\circ s^{-1}\colon(-\sqrt{3},+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

   $$\tilde{\gamma}(u)=\Big((\frac{u}{\sqrt{3}}+1)\cos(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)),(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)\sin(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}}+1)),\frac{u}{\sqrt{3}}+1\Big).$$

3. (a) A curva $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, está parametrizada por comprimento de arco?

Sim: para cada $s \in (-1,1)$,

$$\gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

donde

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2} = 1.$$

(b) Determine o seu triedro de Frenet-Serret.

$$\begin{aligned}
T(s) &= \gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \\
N(s) &= \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\left(\frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}}, 0\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{(1+s)^{-1}+(1-s)^{-1}}} = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}}, 0\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2(1-s^2)^{-1}}} = \left(\sqrt{\frac{1-s}{2}}, \sqrt{\frac{1+s}{2}}, 0\right). \\
B(s) &= T(s) \wedge N(s) = \left(-\frac{\sqrt{1+s}}{2}, \frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$
