

Lógica elementar

1. Quais das seguintes frases são proposições?
 - (a) Isto é verdade?
 - (b) João é um nome.
 - (c) 8 é um número ímpar.
 - (d) 8 é um número par.
 - (e) Esta cor é bonita.
2. Indique os valores lógicos das proposições seguintes:
 - (a) 7 é um número primo.
 - (b) Lisboa é uma cidade.
 - (c) Portugal é uma cidade.
3. Indique quais das seguintes proposições são atómicas e quais são compostas.
 - (a) O Frederico é alto, e o Joaquim também.
 - (b) O carro acidentado era azul ou verde.
 - (c) O carro acidentado era meu.
 - (d) Se fores ao bar, então eu vou ao bar.
4. Usando os símbolos r e f para “Manuel é rico” e “Manuel é feliz”, respectivamente, escreva as seguintes afirmações na forma simbólica.
 - (a) Manuel é rico.
 - (b) Manuel é rico e feliz.
 - (c) Manuel é rico ou feliz.
 - (d) Se Manuel é rico, então é feliz.
5. Identifique todas as proposições atómicas nas frases seguintes e represente-as por símbolos p , q , r , etc. Em seguida escreva as frases sob a forma de cálculo proposicional.
 - (a) Se a Maria está no ginásio, então a Marta também está no ginásio.
 - (b) O carro do Rui é vermelho ou castanho.
 - (c) Se te levatares às sete horas, chegarás a tempo.
 - (d) Chegarás a tempo se e só se te levatares às sete horas.
 - (e) Ele virá se tu o avisares.
 - (f) É suficiente que o João tenha 9,5 valores para que passe.
 - (g) Amanhã vou de autocarro ou de táxi.
 - (h) Amanhã vou de autocarro se ele parar no Rossio, ou vou de táxi se tiver dinheiro.
 - (i) Se acabar o meu trabalho então vou para a praia caso faça bom tempo.

6. Use os símbolos proposicionais p e q para formalizar os seguintes argumentos lógicos:
- Se 10 é um número primo, 10 não pode ser igual a 2 vezes 5. 10 é igual a 2 vezes 5. Logo, 10 não pode ser um número primo.
 - Se chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Se não chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Consequentemente, os agricultores queixam-se.
 - O António almoça na cantina ou o António almoça em casa. O António não almoça na cantina. Logo, o António almoça em casa.
7. Escreva cada uma das seguintes afirmações na forma “se p então q ”.
- Chove sempre que o vento sopra de Sul.
 - É necessário caminhar 20 quilómetros para chegar ao topo do Everest.
 - Toca nesse bolo e arrepende-te-ás.
 - As rosas florirão se estiver calor durante uma semana.
 - A garantia está activa só se tiveres comprado o computador há menos de um ano.
 - Para teres 20 nesta disciplina, é necessário que aprendas a resolver problemas de matemática discreta.
 - Para ser aprovado na disciplina, é suficiente obter 10 valores no exame.
8. Coloque parênteses nas expressões seguintes de tal modo que sejam indicadas as regras de prioridade estabelecidas para os conectivos envolvidos.
- $p \wedge q \wedge r \rightarrow p$.
 - $p \wedge r \vee q \rightarrow \neg r$.
 - $\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow \neg q \vee p_1$.
 - $p \rightarrow q \rightarrow \neg q \rightarrow \neg q$.
9. Escreva as tabelas de verdade para:
- $p \vee (q \wedge r)$.
 - $\neg(\neg p \vee \neg q)$.
 - $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$.
 - $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge p)$.
 - $(p \vee (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$.
 - $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow p)$.
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \neg p$.
10. O conectivo lógico conhecido por “ou exclusivo”, e denotado por $\dot{\vee}$, é definido pela tabela de verdade

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Mostre que $\dot{\vee}$ é equivalente a $\neg(p \leftrightarrow q)$.
- Construa a tabela de verdade para $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$.

11. Determine valores de verdade para as variáveis proposicionais p , q e r para os quais o valor de verdade da fbf $(p \vee q \rightarrow r) \wedge p \rightarrow (r \rightarrow q)$ seja falso.
12. Qual o valor de verdade das seguintes proposições?
- O número 2 é primo ou 4 é ímpar.
 - O número 2 não é primo e 4 é ímpar.
 - O número 2 é primo e 4 é ímpar.
 - O número 2 não é primo ou 4 é ímpar.
 - Se 2 não for primo então 4 é ímpar.
 - Se 2 for primo então 4 é ímpar.
 - Se 2 não for primo então 4 é par.
 - Se 2 não for primo e 4 for par então $4 < 2$.
13. Escreva a negação das proposições (a), (b), (c) e (i) do Exercício 5.
14. Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições, ou contingências.
- $((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$.
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \leftrightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$.
 - $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$.
15. Simplifique as expressões seguintes:
- $(p \wedge \vee) \wedge (q \wedge \vee)$.
 - $(r \wedge \vee) \wedge (q \wedge \neg r)$.
 - $p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$.
16. Use a tabela das equivalências básicas para provar a seguinte equivalência:
- $$\neg((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q).$$
17. Use a tabela das equivalências básicas para provar que a fbf seguinte é uma tautologia:
- $$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p.$$
18. Demonstre a utilidade do método de Quine na averiguação se a fbf seguinte é uma tautologia, contradição ou contingência:
- $$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r).$$
19. Mostre que a fórmula $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ não é uma tautologia. Encontre fórmulas ϕ e ψ tais que $(\neg \phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg \psi)$ seja uma contradição.
20. Determine expressões logicamente equivalentes às seguintes mas sem os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow :
- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$.
 - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow q)$.
 - $\neg p \rightarrow \neg q$.
21. Verifique se o argumento seguinte está correcto (isto é, se a conclusão é logicamente implicada pela conjunção das hipóteses).

Se o orçamento não for cortado, uma condição necessária e suficiente para os preços permanecerem estáveis é que os impostos sejam aumentados. Os impostos serão aumentados somente se o orçamento não for cortado. Se os preços permanecerem estáveis, os impostos não serão aumentados. Portanto os impostos não serão aumentados.

22. Decida se $p \vee \neg s$ é consequência tautológica das premissas $p \vee \neg q$, $q \vee r$ e $r \vee s$.
23. Encontre uma fórmula restrita (isto é, contendo apenas os conectivos \neg , \wedge e \vee) correspondente à função de verdade $f(p, q, r)$ dada pela tabela

p	q	r	$f(p, q, r)$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	F	V
F	F	F	F

24. Seja f a função lógica dada pela tabela

p	q	r	$f(p, q, r)$
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	V

- (a) Determine a forma normal disjuntiva de f .
- (b) Determine a forma normal conjuntiva de f .
25. Determine a forma normal conjuntiva das seguintes expressões:
- (a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r \vee q)$.
- (b) $(p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge s)) \vee (p \wedge q \wedge s)$.
26. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos de conectivos é completo para o cálculo proposicional:
- (a) $\{\neg, \rightarrow\}$.
- (b) $\{\neg, \wedge\}$.
- (c) $\{\neg, \vee\}$.
27. Prove as regras de inferência seguintes, usando tabelas de verdade.
- (a) Modus ponens.
- (b) $a \rightarrow b, (\neg a \rightarrow b) \models b$.
28. Mostre que $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia e use esta tautologia para provar que

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg \neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg q.$$

29. Mostre que os seguintes argumentos são correctos, usando tabelas de verdade.

- (a) $p \vee q, \neg p \vee r \models q \vee r$.
- (b) $p \rightarrow q, p \rightarrow r \models p \rightarrow q \wedge r$.
- (c) $p, p \rightarrow q \models p \wedge q$.
- (d) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \models r$.

30. Averigue se os seguintes argumentos estão correctos, indicando, para cada argumento correcto, a regra de inferência que é usada.

- (a) O número $\log_2 3$ é irracional se não for igual à razão de dois inteiros. Por conseguinte, como $\log_2 3$ não é igual à razão de dois inteiros, conclui-se que $\log_2 3$ é irracional.
- (b) Se n é um número real tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Suponhamos que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.
- (c) Se n é um número real tal que $n > 3$, então $n^2 > 9$. Suponhamos que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.
- (d) A função f tem derivada nula no ponto a ou não tem derivada em a . Como f tem derivada em a , conclui-se que $f'(a) = 0$.
- (e) Se durmo menos do que 7 horas por dia então trabalho muito. Se trabalho muito e durmo menos do que 7 horas por dia então estou cansado. Eu não estou cansado. Logo eu não trabalho muito.
- (f) O resto da divisão de um número par por 4 é 0 ou 2. Assim, se o resto da divisão de um número par por 4 não é 0, então é 2.
- (g) Se n é um número primo então é ímpar ou igual a 2. Logo, se n é um número par diferente de 2, concluímos que n não é primo.

31. A , B e C compareceram perante um tribunal, acusados de roubo. Conseguiu-se estabelecer que:

- Se A não é culpado, o culpado é B ou C .
- Se A não é culpado então C não é culpado.
- Se B é culpado então A é culpado.

Será possível decidir sobre a culpabilidade de A a partir destes factos? Se sim, determine se A é ou não culpado.

32. A *lógica difusa* é usada em inteligência artificial. Nela, os valores de verdade de uma proposição são um número real entre 0 e 1 (inclusivé). Uma proposição com valor de verdade 0 é falsa e uma com valor de verdade 1 é verdadeira. Os valores de verdade entre 0 e 1 indicam diferentes graus de verdade. Por exemplo, o valor de verdade 0.8 pode ser atribuído à proposição “O Artur é feliz” (pois está feliz a maior parte do tempo) e o valor 0.4 à proposição “O Bruno é feliz” (pois está feliz em um pouco menos de metade do tempo).

- (a) O valor de verdade da negação de uma proposição é igual a 1 menos o valor de verdade da proposição. Quais são os valores de verdade das proposições “O Artur não é feliz” e “O Bruno não é feliz”?
- (b) O valor de verdade da conjunção é igual ao mínimo dos valores de verdade das duas proposições. Quais são os valores de verdade das proposições “O Artur e o Bruno são felizes” e “Nem o Artur nem o Bruno são felizes”?
- (c) O valor de verdade da disjunção é igual ao máximo dos valores de verdade das duas proposições. Quais são os valores de verdade das proposições “O Artur é feliz ou o Bruno é feliz” e “O Artur não é feliz ou o Bruno é feliz”?

33. Suponha que $C(x)$ significa “ x é uma criança”, $V(x)$ significa “ x é um vegetal”, e $L(x, y)$ significa “ x gosta de y ”. Determine uma fbf para formalizar cada uma das seguintes afirmações:
- Toda a criança detesta algum vegetal.
 - Algumas crianças detestam todos os vegetais.
 - Só os adultos gostam de vegetais.
34. Considere duas linguagens de 1ª ordem \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , com as constantes *Clara*, *Teresa* e *João*. Os restantes símbolos de \mathcal{L}_1 são o símbolo funcional unário *pai* e os símbolos de predicado (ou relacionais) binários $=$ e *MaisAlto*. Os restantes símbolos de \mathcal{L}_2 são os símbolos de predicado binários $=$, *MaisAlto* e *Pai de* (em que *MaisAlto*(b, c) se lê “ b é mais alto do que c ” e *Pai de*(b, c) lê-se “ b é pai de c ”).
- Traduza as seguintes sentenças atômicas da linguagem \mathcal{L}_2 para a linguagem \mathcal{L}_1 :
 - Pai de*(*João*, *Clara*).
 - Pai de*(*João*, *Teresa*).
 - MaisAlto*(*Teresa*, *Clara*).
 - Quais das seguintes sentenças atômicas na linguagem \mathcal{L}_1 podem ser traduzidas para a linguagem \mathcal{L}_2 ?
 - pai*(*Teresa*) = *João*.
 - pai*(*Teresa*) = *pai*(*Clara*).
 - MaisAlto*(*pai*(*Clara*), *pai*(*João*)).
35. Suponhamos que temos duas linguagens de primeira ordem: a primeira contém os predicados binários *DeuPluto* e *DeuRafeiro*, e os nomes *Miguel* e *Clara*; a segunda contém o predicado ternário *Deu* (onde *Deu*(a, b, c) significa que a deu b a c) e os nomes *Miguel*, *Clara*, *Pluto* e *Rafeiro*.
- Faça uma lista de todas as sentenças atômicas que podem ser expressas na primeira linguagem.
 - Quantas sentenças atômicas podem ser expressas na segunda linguagem?
 - Que nomes e predicados binários precisaria uma linguagem como a primeira de modo a poder dizer-se tudo o que é dito na segunda?