

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.  
A não justificação será penalizada.  
Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

*Duração: 2h30m*

---

1. Sejam  $p$  a proposição “*Conduzes a uma velocidade superior a 110.*” e  $q$  a proposição “*Apanhas uma multa de velocidade.*”. Traduza as frases seguintes usando  $p$ ,  $q$  e os conectivos lógicos.
  - (a) Conduzes a uma velocidade superior a 110 mas não apanhas uma multa de velocidade.
  - (b) Se não conduzires a uma velocidade superior a 110, não apanhas uma multa de velocidade.
  - (c) Conduzires a uma velocidade superior a 110 é condição necessária para apanhares uma multa de velocidade.
2. Seja  $A = a \wedge \neg b \wedge \neg(a \wedge b)$ .
  - (a) Escreva a tabela de verdade de  $A$ .
  - (b) Quando é que se diz que uma fórmula é logicamente equivalente a outra? Averigue se  $A$  é logicamente equivalente a  $a \rightarrow b$ .
3. Averigue se os seguintes argumentos estão correctos, indicando, para cada argumento correcto, a regra de inferência usada.
  - (a) O resto da divisão de um número par por 4 é 0 ou 2. Assim, se o resto da divisão de um número par por 4 não é 0, então é 2.
  - (b) Se a função  $f$  definida por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$ , então é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ . Como a função  $f$  é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ , concluímos que  $f$  é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$ .
4. (a) Indique uma fórmula para o somatório  $\sum_{i=1}^n a_i$  onde  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  é uma progressão aritmética de razão  $r$ .
  - (b) Calcule o valor da soma  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + 10$ .
5. (a) Encripte a mensagem “MATEMATICA” traduzindo as letras em números e aplicando a função de encriptação  $f(p) = (2p + 5) \bmod 23$ .
  - (b) Desencripte as seguintes mensagens:
    - (i) SURMEMGR IZPDU (que foi encriptada usando a *cifra de César*).
    - (ii) ZIV LFRRFPP (que foi encriptada usando a função de 5(a)).

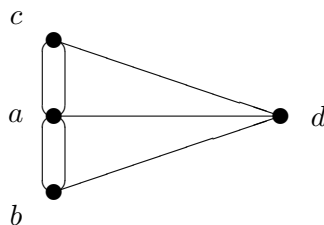
[Nota: neste exercício use o alfabeto português com 23 letras.]

6. Para que inteiros não negativos  $n$  é válida a desigualdade  $2n + 3 \leq 2^n$ ? Justifique a sua resposta usando indução matemática.
7. Aplicando os princípios da adição e/ou da multiplicação determine quantos números maiores do que 666 se podem formar com 3 algarismos, nos quais o primeiro algarismo é diferente do último.
8. Entre os alunos do primeiro ano de um curso superior de línguas, 100 raparigas estudam francês, 80 rapazes estudam francês, 80 raparigas estudam alemão e 100 rapazes estudam alemão. Existem exactamente 60 raparigas que estudam francês e alemão. O número total de alunos que estudam pelo menos uma das duas línguas (francês ou alemão) é igual a 230. Quantos rapazes estudam alemão e não estudam francês?
9. Prove que, em qualquer sequência  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de  $m$  inteiros, existe um ou mais termos consecutivos cuja soma é divisível por  $m$ .
10. (a) Suponha que tem um robô capaz de dar passos de um ou de dois metros. Exprima por meio de uma relação de recorrência o número  $p_n$  de modos diferentes que o robô possui para percorrer  $n$  metros.
- (b) Resolva a relação de recorrência

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

com as condições iniciais  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .

11. Considere o seguinte grafo  $G$ :



- (a)  $G$  é euleriano?
- (b) Qual o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo  $G$  de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel?