

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.
A não justificação será penalizada.
Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

Duração: 2h30m

1. Sejam p a proposição “Sou responsável”, q a proposição “Passo a Estruturas Discretas” e r a proposição “Vou fazer férias nas Bermudas”. Traduza as frases seguintes usando p , q , r e conectivos lógicos.
 - (a) Se passar a Estruturas Discretas, vou fazer férias nas Bermudas.
 - (b) Para fazer férias nas Bermudas é suficiente que eu seja responsável.
 - (c) Para passar a Estruturas Discretas é necessário que eu seja responsável.
 - (d) Passo a Estruturas Discretas só se for responsável.
 - (e) Se passar a Estruturas Discretas, vou fazer férias nas Bermudas se for responsável.
2. Defina tautologia e mostre que a fórmula $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ é uma tautologia:
 - (a) usando tabelas de verdade.
 - (b) sem usar tabelas de verdade.
3. Seja $P(x)$ a afirmação “O estudante x fala japonês”. Considerando para universo de discurso o conjunto X de todos os estudantes dos cursos de engenharia, traduza as frases seguintes em fórmulas bem formadas do cálculo de predicados.
 - (a) Há pelo menos um estudante que fala japonês.
 - (b) Nenhum estudante fala japonês.
4. Considere o algoritmo seguinte que, dado um inteiro n , permite determinar a sua expansão na base b .

```
procedure expansão base  $b$  ( $n$ : inteiro positivo)
 $q := n$ 
 $k := 0$ 
while  $q \neq 0$ 
begin
   $a_k := q \bmod b$ 
   $q := \lfloor q/b \rfloor$ 
   $k := k + 1$ 
end {a expansão de  $n$  na base  $b$  é o número  $a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ }
```

- (a) Calcule a expansão na base 8 do número 12345.
- (b) Determine a complexidade deste algoritmo em termos do número de divisões inteiras efectuadas.

5. Determine:

(a) $\text{mdc}(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13, 2^{11} \times 3^9 \times 11 \times 17^{14})$.

(b) Todas as soluções da congruência linear $7x \equiv 14 \pmod{21}$ no conjunto

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, \dots, 10\}.$$

6. Mostre que no sistema RSA, sendo $n = pq$ um produto de dois primos p e q e $m = (p-1)(q-1)$, será fácil a um intruso descobrir os valores dos dois primos p e q se conhecer os valores de n e m .

7. Sabendo que a função f está definida recursivamente por

$$f(0) = f(1) = 1, \quad f(n+1) = f(n)f(n-1),$$

calcule o valor da expressão

$$-10 \pmod{13} + \lfloor \frac{1}{2} + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor \rfloor + f(3) + f(4).$$

8. (a) Prove por indução matemática que, para todo o inteiro $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para calcular a diferença entre a soma dos quadrados dos primeiros 10 números inteiros positivos pares e a soma dos quadrados dos 10 primeiros inteiros positivos ímpares.

9. Aplicando os princípios da adição e/ou da multiplicação determine quantos números com 4 algarismos se podem formar com os dígitos do conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$, de modo a que nenhum deles tenha dígitos repetidos e todos contêmam o algarismo 5.

10. Suponha que uma bactéria necessita de duas horas para se desenvolver, após as quais produz dois descendentes e, posteriormente, mais dois descendentes no final de cada hora subsequente. Admitindo que todos os descendentes têm o mesmo comportamento, determine o número b_n de bactérias reproduzidas após n horas, supondo que o processo se inicia com uma única bactéria acabada de nascer.

11. (a) Desenhe o grafo completo de três vértices, K_3 . Defina caminho euleriano e diga, justificando, se K_3 possui um caminho euleriano.

(b) Diga, justificando, quais os grafos completos K_n ($n \geq 1$) que têm um caminho euleriano.