Ano lectivo 2007/08 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.^{as} Eng. Informática, Comunicação e Multimédia 21/01/08

SOLUÇÕES

---

1. (a) $q \rightarrow r$.

   (b) $p \rightarrow r$.

   (c) $q \rightarrow p$.

   (d) $q \rightarrow p$.

   (e) $q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

2. Uma fórmula bem formada diz-se uma *tautologia* se for verdadeira para todos os possíveis valores lógicos das suas variáveis proposicionais.

   (a)

$[\neg$	p	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$q)]$	$\rightarrow$	q
F	V	F	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V
F	V	F	V	V	F	$\boxed{\text{V}}$	F
V	F	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V
V	F	F	F	F	F	$\boxed{\text{V}}$	F

   (b)

$$\begin{aligned}
[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q &\equiv [(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow q \\
&\equiv [\mathsf{F} \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow q \\
&\equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow q \\
&\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee q \\
&\equiv \neg\neg p \vee \neg q \vee q \\
&\equiv p \vee \neg q \vee q \\
&\equiv p \vee \mathsf{V} \\
&\equiv \mathsf{V}
\end{aligned}$$

   (**Resolução alternativa:** método de Quine...)

3.

   (a) $\exists x \in X \ P(x)$.

   (b) $\forall x \in X \ \neg P(x)$.

4.

   (a) Simulando o algoritmo com input $n = 12345$ e $b = 8$ obtemos:

$q := 12345$
$k := 0$
$q \neq 0$
  $a_0 := 12345 \texttt{ mod } 8 = 1$ (pois $12345 = 8 \times 1543 + 1$)
  $q := \lfloor 12345/8 \rfloor = 1543$
  $k := k + 1 = 1$
$q \neq 0$
  $a_1 := 1543 \texttt{ mod } 8 = 7$ (pois $1543 = 8 \times 192 + 7$)
  $q := \lfloor 1543/8 \rfloor = 192$
  $k := k + 1 = 2$
$q \neq 0$
  $a_2 := 192 \texttt{ mod } 8 = 0$ (pois $192 = 8 \times 24$)
  $q := \lfloor 192/8 \rfloor = 24$
  $k := k + 1 = 3$
$q \neq 0$
  $a_3 := 24 \texttt{ mod } 8 = 0$ (pois $24 = 8 \times 3$)
  $q := \lfloor 24/8 \rfloor = 3$
  $k := k + 1 = 4$
$q \neq 0$
  $a_4 := 3 \texttt{ mod } 8 = 3$ (pois $3 = 8 \times 0 + 3$)
  $q := \lfloor 3/8 \rfloor = 0$
  $k := k + 1 = 5$
$q = 0$ STOP

{a expansão de n na base b é o número $a_4a_3a_2a_1a_0 = 30071$ }

Portanto $(12345)_8 = 30071$.

(b) Como se observou na alínea anterior, em cada passo do ciclo `while` o algoritmo realiza uma divisão inteira (registadas entre parêntesis) que permite calcular simultaneamente os valores de a_k e q. Portanto, o número de divisões efectuadas é igual ao número de passos do ciclo, que depende evidentemente do número n. Mais exactamente, esse número é o inteiro d que satisfaz $b^{d-1} \leq n < b^d$ (no exemplo da alínea anterior, $4096 = 8^4 \leq 12345 < 8^5 = 32768$ pelo que $d = 5$). Logo, $d - 1 \leq \log_b n < d$. Assim, $d \leq \log_b n + 1$ o que mostra que o algoritmo tem complexidade $O(\log_b n)$.

5. (a) $\mathrm{mdc}(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13, 2^{11} \times 3^9 \times 11 \times 17^{14}) = 2 \times 3 \times 11 = 66$.

(b)

$$\begin{aligned} 7x \equiv_{21} 14 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ 7x - 14 = 21k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ 7x = 14 + 21k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ 7x = 7(2 + 3k) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ x = 2 + 3k. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções para x são os inteiros da forma $2 + 3k$. Quais deles pertencem ao conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 10\}$? Precisamente os números $-1, 2, 5$ e 8.

6. Suponhamos que conhecemos ambos os números $n = pq$ e $m = (p-1)(q-1)$. Para descobrir p e q, notemos primeiro que $(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = n - (p+q) + 1$. Portanto, $m = n - (p+q) + 1$. Como conhecemos n e m podemos assim determinar $s = p + q$. Como $q = s - p$, temos $n = p(s-p)$, ou seja, $p^2 - ps + n = 0$, donde podemos determinar o valor de p pela fórmula resolvente das equações do segundo grau. Depois de determinado o valor de p, bastará calcular n/p para obtermos o valor de q.

7. Como $f(3) = f(2)f(1) = f(1)f(0)f(1) = 1$ e $f(4) = f(3)f(2) = 1$ então

$$\begin{aligned}
-10 \bmod 13 + \lfloor \frac{1}{2} + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor \rfloor + f(3) + f(4) &= 3 + \lfloor \frac{1}{2} + 0 \rfloor + 1 + 1 \\
&= 3 + 0 + 2 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

8. (a) Seja $P(n)$ a proposição $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.
   $P(1)$ é claramente verdadeira: $(-1)^1 = \frac{(-1)^1 2}{2}$.
   Assumindo que $P(n)$ é verdadeira, provemos que $P(n+1)$ é verdadeira. O membro esquerdo de $P(n+1)$ é:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \qquad \text{(pela hipótese de indução)} \\
&= \frac{(-1)^n n(n+1) + (-1)^{n+1}\, 2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)[2(n+1) - n]}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

   que é o membro direito de $P(n+1)$. Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira e, pelo Princípio de Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para qualquer n.

   (b) Uma vez que

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ par}}}^{20} k^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{20} k^2 = \sum_{k=1}^{20} (-1)^k k^2,$$

   então, pela alínea anterior,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ par}}}^{20} k^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{20} k^2 = \frac{(-1)^{20} 20 \times 21}{2} = 10 \times 21 = 210.$$

9. Teremos que contar todos os números da forma $5---$, mais os da forma $-5--$, $--5-$ e $---5$, onde cada uma das três posições livres pode ser ocupada pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, sem ocorrer repetição de nenhum. Pelo princípio da multiplicação, podemos formar $P(8,3)$ números de cada um destes quatro tipos. Portanto, pelo princípio da adição, podemos formar no total

$$P(8,3) + P(8,3) + P(8,3) + P(8,3) = 4 \times P(8,3) = 4 \times 8 \times 7 \times 6$$

números.

10. Evidentemente $b_0 = b_1 = 1$ e $b_2 = 3$. Ao fim de n meses, o número b_n de bactérias existentes será igual ao número de bactérias existentes no final do mês anterior (ou seja, b_{n-1}) mais as que entretanto foram produzidas no decorrer desse mês (cujo número é igual ao dobro do número de bactérias em condições de se reproduzir nesse mês, ou seja, $2b_{n-2}$). Assim,

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}.$$

Trata-de de uma relação de recorrência de segunda ordem com equação característica

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Resolvendo-a obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -1.$$

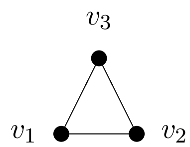
Portanto, a solução geral da relação de recorrência é da forma $b_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Os valores de α e β podem ser facilmente calculados usando as condições iniciais:

$$\begin{cases} 1 = b_0 = \alpha + \beta \\ 1 = b_1 = 2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Em conclusão,

$$b_n = \frac{2}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

11. (a)



Chama-se caminho euleriano a um caminho fechado sem repetição de arestas, contendo todas as arestas do grafo.

Este grafo tem claramente um caminho euleriano (logo o grafo é euleriano) pois os vértices têm todos grau par. Por exemplo, v_1, v_2, v_3, v_1 é um desses caminhos.

(b) No grafo K_n o grau de cada vértice é igual a $n-1$ pois cada vértice tem uma aresta ligando-o a cada um dos outros $n-1$ vértices. Portanto, pelo Teorema de Euler, K_n tem um caminho euleriano se e só se $n-1$ é par, ou seja, se e só se n é ímpar.