Duração: 40m **Teste 4A** 21/12/07

SOLUÇÕES

---

1. Calcule:

   (a) $P(7,3)$. R.: 210

   (b) $0! + 1! + 4! + 5!$. R.: 146

   (c) $C(7,3)$. R.: 35

2. Em cada uma das alíneas seguintes responda com uma das seguintes alternativas:

   $$C(7,3), \overline{C}(7,3), P(7,3), \overline{P}(7,3).$$

   De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 3 bolas iguais, coloridas, por 7 caixas diferentes (numeradas de 1 a 7) se:

   (a) as bolas forem todas da mesma cor e for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa. R.: $\overline{C}(7,3)$

   (b) as bolas forem todas da mesma cor e não for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa. R.: $C(7,3)$

   (c) as bolas forem todas de cores diferentes e for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa. R.: $\overline{P}(7,3)$

   (d) as bolas forem todas de cores diferentes e não for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa. R.: $P(7,3)$

3. Seja $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$.

   (a) Quantos elementos de A são divisíveis por 2? R.: 25

   (b) Quantos elementos de A são divisíveis por 3? R.: 16

   (c) Quantos elementos de A não são divisíveis por 2 nem por 3? R.: 17

4. O número de bactérias numa colónia triplica a cada hora.

   (a) Determine uma relação de recorrência para o número b_n de bactérias existentes na colónia após n horas. R.: $b_n = 3b_{n-1}$

   (b) Se inicialmente a colónia contiver 100 bactérias, quantas terá ao fim de 10 horas? R.: $3^{10} \times 100$

RESOLUÇÃO

1(a) $P(7,3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

(b) $0! + 1! + 4! + 5! = 1 + 1 + 24 + 120 = 146$.

(c) $C(7,3) = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$.

3(a) Os divisíveis por 2 são os números pares $2, 4, 6, \ldots, 50$, ou seja, são $50/2 = 25$.

(b) Os divisíveis por 3 são os números $3, 6, 9, \ldots, 48$, ou seja, são $48/3 = 16$. Destes , 8 são pares.

(c) Seja A_2 o subconjunto de A dos elementos divisíveis por 2 e seja A_3 o dos elementos divisíveis por 3. Pela fórmula de inclusão-exclusão, o cardinal do conjunto $\overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ dos que não são divisíveis por 2 nem por 3 é dado por $|A| - (|A_2| + |A_3|) + |A_2 \cap A_3| = 50 - (25 + 16) + 8 = 17$.

4(a) $b_n = 3b_{n-1}$.

(b) $b_n = 3b_{n-1} = 3^2\, b_{n-2} = 3^3\, b_{n-3} = \cdots = 3^n\, b_0$. Como $b_0 = 100$, então $b_n = 3^n \times 100$. Logo $b_{10} = 3^{10} \times 100$.

As resoluções dos restantes testes são análogas:

SOLUÇÕES

TESTE 4B	TESTE 4C	TESTE 4D
1(a) 120	1(a) 146	1(a) 20
(b) 146	(b) 840	(b) 120
(c) 20	(c) 35	(c) 128
2(a) 20	2(a) $\overline{P}(7,4)$	2(a) 35
(b) 30	(b) $C(7,4)$	(b) 14
(c) 20	(c) $\overline{C}(7,4)$	(c) 28
3(a) $C(6,3)$	(d) $P(7,4)$	3(a) $C(6,4)$
(b) $\overline{C}(6,3)$	3(a) 16	(b) $P(6,4)$
(c) $P(6,3)$	(b) 10	(c) $\overline{C}(6,4)$
(d) $\overline{P}(6,3)$	(c) 27	(d) $\overline{P}(6,4)$
4(a) $b_n = (5/2)b_{n-1}$	4(a) $b_n = 3b_{n-1}$	4(a) $b_n = (5/2)b_{n-1}$
(b) $(5/2)^8 \times 1000$	(b) $3^8 \times 100$	(b) $(5/2)^9 \times 200$