2.2. Técnicas avançadas

Permutações e combinações com repetição

Podemos complicar um pouco o cálculo de permutações ou combinações se admitirmos repetição de elementos. Como o cálculo destas estruturas aparece em muitos problemas práticos será importante encontrarmos fórmulas que nos dêem a solução em cada um dos casos.

Seja então S um conjunto com n elementos. Consideremos as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ com elementos em S, eventualmente não todos distintos. Designemos estas sequências por *permutações com repetição de elementos de* S*,* r *a* r. Se admitirmos que cada elemento de S se pode repetir, como componente das permutações com repetição, tantas vezes quantas quisermos, temos:

Teorema 1. *O número destas permutações, que denotaremos por* $\overline{P}(n, r)$*, é igual a* n^r*.*

Prova. Ao construirmos cada permutação com repetição $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ temos n hipóteses de escolha do primeiro elemento a_1 e o mesmo número de hipóteses de escolha dos restantes elementos. Portanto, no total conseguimos construir

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r \text{ vezes}} = n^r$$

permutações diferentes. □

Exemplos. (1) Se quisermos ter a certeza de obter 13 resultados certos no totobola teremos de preencher $\overline{P}(3, 13) = 3^{13}$ colunas.
(2) Observámos anteriormente que o número de subconjuntos de um conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é igual a 2^n. Podemos concluir isso de outro modo: se a cada subconjunto S' de S fizermos corresponder uma sequência $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ de comprimento n, definida por

$$a'_i = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i \in S \\ \\ 0 \text{ se } a_i \notin S \end{cases}$$

concluímos que o número de subconjuntos de S é dado por $\overline{P}(2, n) = 2^n$.

Teste. *Qual é a probabilidade* $p(n)$ *de, entre* n *pessoas, existirem pelo menos duas que façam anos no mesmo dia?*

Solução. Admitiremos só como datas possíveis de nascimento os 365 dias de um ano não bissexto. Calculemos a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de todas as pessoas fazerem anos em dias diferentes. O número de casos possíveis é igual a $\overline{P}(365, n)$, uma vez que cada caso é uma sequência de n elementos, que se podem repetir, escolhidos entre os 365 dias. O número de casos favoráveis é igual a $P(365, n)$ pois cada caso favorável é uma sequência de n elementos, sem repetição, escolhidos entre os 365 dias. A probabilidade $p(n)$ é então dada por

$$1 - \frac{P(365, n)}{\overline{P}(365, n)} = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Alguns valores particulares de p: $p(5) = .0713557370$, $p(10) = .1169481777$, $p(15) = .2529013198$, $p(20) = .4114383836$, $p(25) = .5686997040$ e $p(30) = .7063162427$.

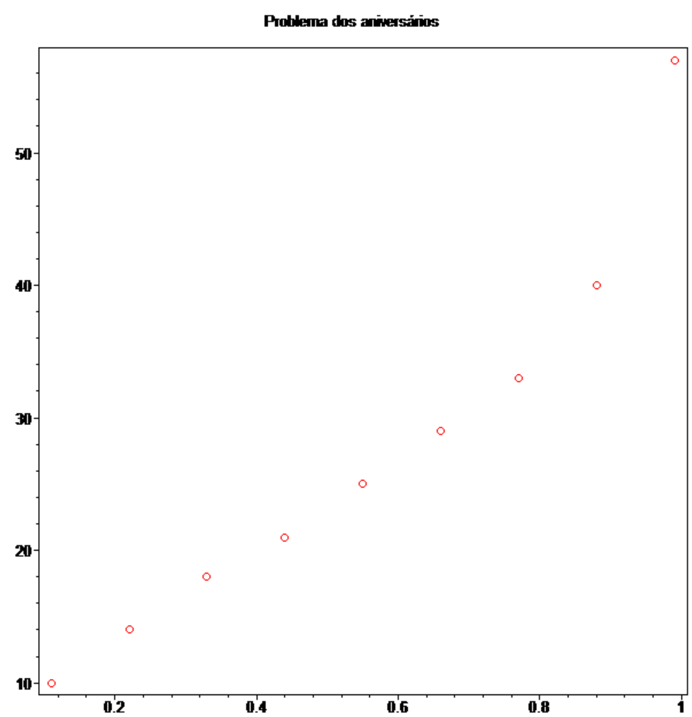
Qual é o menor valor de n para o qual $p(n) \geq 0.5$? e para o qual $p(n) \geq 0.99$? O seguinte procedimento em `Maple` calcula esses limites inferiores:

```
> with(combinat);
> Aniversarios := proc(percentagem::float)
>    local num_pessoas, prob;
>    # Inicializa
>    prob := 0; num_pessoas := 0;
>    # Efectua ciclo ate ao numero suficiente de pessoas
>    while prob < percentagem do
>       num_pessoas := num_pessoas +1;
>       prob := 1-(numbperm(365,num_pessoas) / 365^num_pessoas);
>    od;
>    RETURN(num_pessoas);
> end;
>
> Aniversarios(.5); Aniversarios(.99);
```

$23,\ 57$

Este é o chamado *problema dos aniversários*, muito conhecido pois a resposta parece, à primeira vista, um pouco surpreendente: não é preciso um n muito grande para a probabilidade ser maior que 0.99, basta $n \geq 57$.

```
Aniversarios(.11)=10
Aniversarios(.22)=14
Aniversarios(.33)=18
Aniversarios(.44)=21
Aniversarios(.55)=25
Aniversarios(.66)=29
Aniversarios(.77)=33
Aniversarios(.88)=40
Aniversarios(.99)=57
```



Designemos por *multi-conjunto* uma estrutura similar à de um conjunto mas com a diferença de os seus elementos não terem forçosamente que ser distintos. Por exemplo, $M = \{a, a, b, b, b, c\}$ é um multi-conjunto com 6 elementos: 2 a's, 3 b's, 1 c. Costuma indicar-se um multi-conjunto especificando o número de ocorrências de cada elemento. Portanto o multi-conjunto M também se denota por $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, c\}$. Chamaremos *combinação com repetição dos elementos de S, r a r*, aos multi-conjuntos de r elementos de S.

Teorema 2. *O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, que designaremos por $\overline{C}(n, r)$, é igual a* $C(n-1+r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!}$.

Prova. Podemos demonstrar este resultado utilizando somente argumentos combinatórios. De facto, cada combinação com repetição de n elementos r a r pode ser representada por uma sequência de $n-1$ barras e r asteriscos, do seguinte modo: as barras são utilizadas para demarcar em n células os n diferentes elementos de S, com a i-ésima célula contendo um asterisco sempre que o i-ésimo elemento de S ocorre na combinação. Por exemplo, para $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

Multi-conjunto	Representação
$\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	$**\,\vert\,*\,\vert\,\vert\,***$
$\{a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3\}$	$\vert\,**\,\vert\,****\,\vert$

Assim o número de combinações com repetição de n elementos r a r coincide com o número de sequências contendo $n-1$ barras e r asteriscos. O número de tais sequências é igual a $C(n-1+r, r)$, uma vez que cada sequência corresponde a uma escolha de r posições (das $n-1+r$ posições disponíveis) para colocar os r asteriscos (após a escolha das posições onde vão ficar os asteriscos, as barras ficam forçosamente nas posições restantes). $\square$

Demonstrámos este teorema utilizando somente argumentos combinatórios. Aliás, a solução de problemas combinatórios requere geralmente o uso de métodos *ad hoc*; deve-se estudar a situação, desenvolver algum raciocínio e usar a própria intuição para encontrar a solução do problema. Isto não quer dizer que não existam princípios ou métodos que possam ser aplicados. Com efeito, já estudámos alguns. Mas todos eles requerem inteligência para se saber quando e como aplicá-los e, sobretudo, experiência (que naturalmente só se adquire resolvendo problemas).

Em resumo:

Tipo	**Repetição permitida?**	**Fórmula**
Permutações $P(n, r)$	Não	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
Combinações $C(n, r)$	Não	$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
Permutações $\overline{P}(n, r)$	Sim	n^r
Combinações $\overline{C}(n, r)$	Sim	$\dfrac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!}$

Exemplos. (1) O número de sequências crescentes (em sentido lato) com r componentes, escolhidas no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, é igual a $C(n + r - 1, r)$.
(2) O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0)$, é igual a

$$\overline{C}(3, 11) = C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = 78.$$

Mais geralmente, $\overline{C}(n, r)$ é igual ao número de soluções inteiras (não negativas) da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. De facto, qualquer combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, r a r, contém, para cada i, p_i elementos iguais a a_i, e $\sum_{i=1}^{n} p_i = r$; por outro lado, é evidente que a cada conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de inteiros positivos ou nulos, com $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = r$, podemos fazer corresponder a combinação com repetição de elementos de S, r a r,

$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{p_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{p_2 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{p_n \text{ vezes}}\}.$$

Assim, as equações $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 8$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 5$ têm o mesmo número de soluções inteiras não negativas pois

$$\overline{C}(6, 8) = C(13, 8) = \frac{13!}{8!\,5!} = 1287$$

e

$$\overline{C}(9, 5) = C(13, 5) = C(13, 8) = 1287.$$

(3) Qual é o valor de k depois do seguinte algoritmo ter sido executado?

```
k := 0
for i1 := 1 to n
   for i2 := 1 to i1
      for i3 := 1 to i2
         ⋮
            for ir := 1 to ir−1
               k := k + 1
```

Observemos que o valor inicial de k é 0 e que uma unidade é adicionada a k de cada vez que o *ciclo* é atravessado com um conjunto de inteiros $i_1, i_2, \ldots, i_r$ tais que

$$1 \leq i_r \leq i_{r-1} \leq \cdots \leq i_2 \leq i_1 \leq n.$$

O número de tais conjuntos de inteiros é igual ao número de maneiras de escolher r inteiros de $\{1, 2, \ldots, n\}$, ordenados por ordem crescente, com repetição permitida, ou seja, é igual a $\overline{C}(n, r) = C(n + r - 1, r)$.

Confirmemos isso no `Maple`, no caso $r = 5$:

```
> alg:=proc(n::integer)
> local k,i1,i2,i3,i4,i5;
>    k := 0;
```

```
>    for i1 from 1 to n do
>       for i2 from 1 to i1 do
>          for i3 from 1 to i2 do
>             for i4 from 1 to i3 do
>                for i5 from 1 to i4 do
>                    k := k+1;
>                od;
>             od;
>          od;
>       od;
>    od;
>    RETURN(k);
> end;
>
> alg(10); alg(5);
```

2002
126

Portanto, `alg(n)` representa o valor de k depois de algoritmo ter sido executado, e deverá coincidir com $\overline{C}(n,5) = C(n+5-1,5) = C(n+4,5)$.

```
> binomial(10+4,5); binomial(5+4,5);
```

2002
126

Podemos impôr algumas restrições à repetição dos elementos nas combinações e permutações:

Corolário 1. *Seja S um conjunto com n elementos. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r ($r \geq n$), contendo todos os elementos de S (cada um pelo menos uma vez) é igual a $C(r-1,n-1)$.*

Prova. Cada multi-conjunto conterá n elementos distintos de S, podendo os $r-n$ restantes serem elementos quaisquer de S. Consequentemente, o número a contar é igual a

$$\overline{C}(n,r-n) = C(n+r-n-1,r-n) = C(r-1,r-n) = C(r-1,r-1-r+n) = C(r-1,n-1).$$

□

Mais geralmente, tem-se:

Corolário 2. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a $C(n+r-r_1-\cdots-r_n-1, r-r_1-\cdots-r_n)$.*

Prova. Em cada multi-conjunto haverá r_i elementos iguais a a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podendo os restantes $r - r_1 - \cdots - r_n$ serem elementos quaisquer de S. Portanto, o número de combinações requerido é igual a

$$\overline{C}(n, r - r_1 - \cdots - r_n) = C(n + r - r_1 - \cdots - r_n - 1, r - r_1 - \cdots - r_n).$$

□

E o número das respectivas permutações? Aqui aparecem os números

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!},$$

onde $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ são tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Estes números designam-se por *números (ou coeficientes) multinomiais*, e denotam-se habitualmente por

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad \text{ou} \quad \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Estes números generalizam os coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \frac{n!}{n_1!\,(n - n_1)!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Teorema 3. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de permutações com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a*

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}.$$

(O somatório é tomado sobre todos os $s_i \geq r_i$ tais que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = r$.)

Prova. Basta observar que o número dessas permutações é, pelo Princípio da Multiplicação, igual a

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} C(r, s_1) \times C(r - s_1, s_2) \times C(r - s_1 - s_2, s_3) \times \cdots \times C(\underbrace{r - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1}}_{s_n}, s_n).$$

Mas este número é igual a

$$\frac{r!}{s_1!\,(r - s_1)!} \times \frac{(r - s_1)!}{s_2!\,(r - s_1 - s_2)!} \times \frac{(r - s_1 - s_2)!}{s_3!\,(r - s_1 - s_2 - s_3)!} \times \cdots \times \frac{(r - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1})!}{s_n!\,(\underbrace{r - s_1 - s_2 - \cdots - s_n}_{=0})!} =$$

$$= \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} = \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}.$$

□

É claro que podemos também impôr condições ao número máximo de vezes que cada elemento pode ser repetido nas combinações e permutações. Aqui as fórmulas são um pouco mais complicadas e não as apresentaremos.

Observação. Tal como os números binomiais aparecem no desenvolvimento do binómio, os números multinomiais

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

são precisamente os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$. Por exemplo:

```
> combinat[multinomial](4,0,0,4); combinat[multinomial](4,0,1,3);
> combinat[multinomial](4,0,2,2); combinat[multinomial](4,1,1,2);
```

1, 4, 6, 12

```
> for n from 1 to 4 do
>    sort(expand((x + y + z)^n));
> od;
```

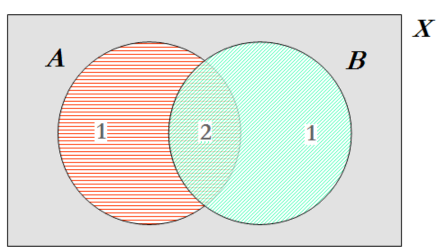
$x + y + z$
$x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$
$x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$
$x^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 + 12x^2yz + 6x^2z^2 + 4xy^3 + 12xy^2z + 12xyz^2 + 4xz^3 + y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$

Princípio da Inclusão-Exclusão

O Princípio da Inclusão-Exclusão que vamos agora apresentar é também conhecido por *fórmula do crivo* ou *fórmula de da Silva-Sylvester*[26] e generaliza o Princípio da Adição.

Se A e B forem dois subconjuntos de X qual será o número de elementos da união $A \cup B$? Se somarmos simplesmente o número de elementos de A com o número de elementos de B estaremos a contar, uma vez cada um, os elementos de $A - B$ e os de $B - A$, mas estaremos a contar por duas vezes os elementos da intersecção $A \cap B$ (é o que o número 2 indica na região $A \cap B$ na figura):

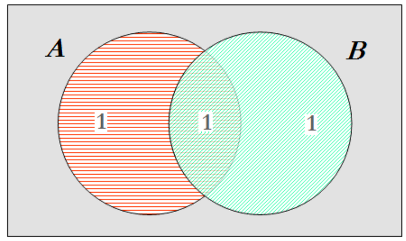
$|A| + |B|$:



[26] O Princípio da Inclusão-Exclusão foi publicado pela primeira vez em 1854, num artigo de Daniel da Silva, e mais tarde, em 1883, por Sylvester. Por isso, a fórmula do crivo e suas similares são, por vezes, apelidadas de fórmulas de da Silva ou de Sylvester. Realçamos o facto de Daniel da Silva, na opinião de Gomes Teixeira o mais notável matemático português do séc. XIX, ter sido estudante da Universidade de Coimbra; transcrevemos de [J. Silva Oliveira, *Daniel Augusto da Silva*, Boletim da SPM 2 (1979) 3-15]: "Daniel da Silva (1814-1878) foi, além de matemático eminente do seu tempo, oficial da Armada e professor da Escola Naval. Como estudante frequentou primeiro a Academia Real de Marinha e prosseguiu depois os seus estudos na Universidade de Coimbra onde, com altas classificações, se licenciou em Matemática e acabou por se doutorar".

Teremos então que descontar esses elementos:

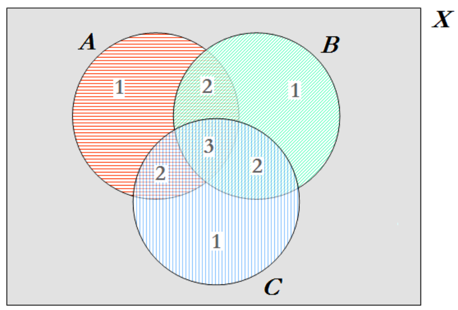
$|A| + |B| - |A \cap B|$:



Em conclusão, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ e, consequentemente, o complementar $X - (A \cup B)$ tem cardinal igual a $|X| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$.

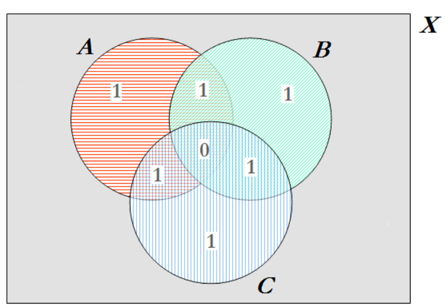
E se forem 3 subconjuntos A, B e C em vez de 2? Neste caso poderemos começar por somar os elementos em A, B e C.

$|A| + |B| + |C|$:



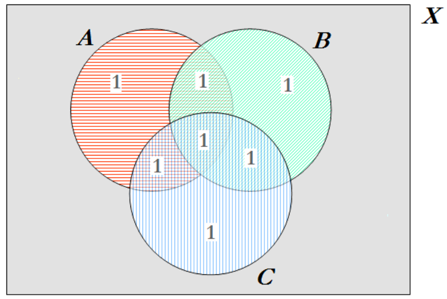
Deste modo estaremos a contar, uma vez cada um, os elementos de $A - (B \cup C)$, os de $B - (A \cup C)$ e os de $C - (A \cup B)$, mas estaremos a contar por duas vezes os elementos de $(A \cap B) - C$, $(A \cap C) - B$ e $(B \cap C) - A$, e, pior ainda, estaremos a contar por três vezes os elementos da intersecção $A \cap B \cap C$. Podemos começar por descontar os primeiros adicionando $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$.

$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$:



Mas agora acabámos por descontar os elementos da intersecção $A \cap B \cap C$ mais do que devíamos (o zero na figura acima indica que os elementos dessa região ainda não foram considerados para a contagem dos elementos de $A \cup B \cup C$), tendo que os contar novamente, para que a contagem fique certa.

$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$:



Agora, finalmente, todos os elementos de todas as regiões de $A \cup B \cup C$ foram contados precisamente uma vez.

Estamos em condições de analisar o caso geral de n subconjuntos. No que se segue, assumiremos que X é um conjunto finito e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são n propriedades que cada elemento de X poderá ou não possuir. Denotaremos por A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto dos elementos de X que possuem a propriedade P_i, e por $\overline{A_i}$ o respectivo complementar $X - A_i$.

Princípio da Inclusão-Exclusão. *O número $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ de elementos de X que possuem, pelo menos, uma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é igual a*

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,$$

onde o primeiro somatório percorre todos os inteiros $1, 2, \ldots, n$, o segundo somatório percorre todas as combinações $\{i, j\}$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, dois a dois, o terceiro somatório percorre todas as combinações $\{i, j, k\}$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, três a três, e assim sucessivamente.

Prova. É evidente que o conjunto dos elementos de X que possuem alguma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é a união $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Podemos verificar a validade da identidade a provar mostrando que um objecto com alguma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com uma unidade para a soma do enunciado do princípio e que um objecto que não verifique nenhuma dessas propriedades contribui com um zero para essa mesma soma.

Designemos esta soma por M. Cada elemento de X que não possui nenhuma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com

$$0 - 0 + 0 - \cdots + (-1)^{n+1} \times 0 = 0$$

unidades para o valor M, pois não pertence a nenhum A_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Por outro lado, cada elemento de X que possui m ($1 \leq m \leq n$) das n propriedades contribui com $C(m, 1) = m$ unidades para $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ (pois pertence a m dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$), com $C(m, 2)$ unidades para $\sum_{i,j=1; i<j}^{n} |A_i \cap A_j|$ (pois existem $C(m, 2)$ maneiras diferentes de escolher um par de propriedades distintas que ele satisfaça) e assim sucessivamente. Então a sua contribuição para M é igual a

$$C(m, 1) - C(m, 2) + C(m, 3) - \cdots - (-1)^m C(m, m)$$

que, por sua vez, é igual a $C(m,0)=1$, pois por uma fórmula deduzida na secção anterior [27],

$$C(m,0)-C(m,1)+C(m,2)-C(m,3)+\cdots+(-1)^{m+1}C(m,m)=0. \qquad \square$$

Por vezes, a seguinte formulação alternativa do Princípio da Inclusão-Exclusão é mais útil:

Corolário. *O número $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$ de elementos de X que não possuem qualquer das propriedades $P_1,P_2,\ldots,P_n$ é dado por*

$$|X|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|-\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

Prova. É claro que o número de elementos de elementos de X que não verificam nenhuma das propriedades $P_1,P_2,\ldots,P_n$ é o cardinal de $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}=X-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão esse número é igual a

$$|X|-\Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\Big)$$

$$=|X|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|-\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

$\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicação do Princípio da Inclusão-Exclusão. Comecemos por recordar o Problema (B3) do texto introductório do curso“O que é a Matemática Discreta?”:

> *À saída de um restaurante, de quantas maneiras podem ser devolvidos os chapéus de n pessoas de modo a que nenhuma pessoa receba o seu chapéu?*[28]

Este problema é um caso particular do seguinte problema geral, designado por **problema dos desencontros**:

> *Estando os elementos de um conjunto finito S dispostos segundo uma certa ordem, quantas permutações de S existem nas quais nenhum elemento esteja na sua posição primitiva?*

Uma permutação $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_n}$ de $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ diz-se um *desencontro* de S caso $j_k\neq k$ para qualquer $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Denotemos por D_n o número de desencontros de S.

[27] Terceira identidade binomial na página 93.

[28] Também costuma aparecer enunciado do seguinte modo, na forma de um jogo de cartas: “No chamado ‘jogo dos pares’, as 52 cartas de um baralho são dispostas em linha, com o seu valor à vista. As cartas de um segundo baralho são dispostas também em linha por cima das outras. A pontuação é determinada contando o número de vezes em que a carta do segundo baralho coincide com a do primeiro sobre a qual foi colocada. Qual é a probabilidade de se obterem zero pontos?”

Solução do problema. *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big)$.

Prova. Seja X o conjunto de todas as permutações de S. Claro que $|X| = n!$. Seja ainda A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) o conjunto das permutações $a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ tais que $a_{j_i} = a_i$ (portanto aquelas em que a_i está na posição primitiva). Claro que $|A_i| = (n-1)!$. As permutações em $A_i \cap A_j$ têm a_i e a_j fixos, nas posições i e j respectivamente, e os restantes $n-2$ elementos permutados nas restantes $n-2$ posições, pelo que $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$. Analogamente, podemos concluir que $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Como $D_n = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$, decorre pelo Princípio da Inclusão-Exclusão que

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big). \end{aligned}$$

□

Cálculo de $D_2, D_3, \ldots, D_{15}$:

```
> Des := proc(n::integer)
>    local k;
>    RETURN(sum((-1)^k  * (n!/k!), k=0..n));
> end;
>
> seq(Des(i),i=2..15);
```

1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734

Na sua forma original o problema (B3) foi formulado em termos de probabilidades, questionando a probabilidade de nenhuma pessoa receber de volta o respectivo chapéu. Evidentemente, a resposta é a probabilidade de uma permutação de n objectos, escolhida aleatoriamente, ser um desencontro, ou seja,

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

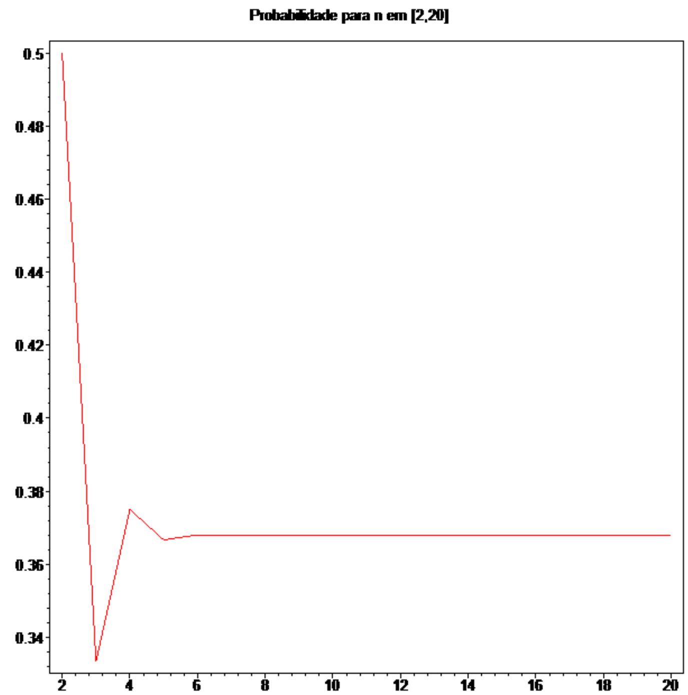
Cálculo desta probabilidade para alguns valores particulares de n:[29]

```
> Digits := 20;
> for i from 2 to 10 do
>    evalf(Des(i)/i!);
> od;
```

[29] Usando factos da Análise Matemática é possível provar que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= e^{-1} \sim 0.3679. \end{aligned}$$

```
n,  probabilidade
2,  0.50000000000000000000
3,  0.33333333333333333333
4,  0.37500000000000000000
5,  0.36666666666666666667
6,  0.36805555555555555556
7,  0.36785714285714285714
8,  0.36788194444444444444
9,  0.36787918871252204586
10, 0.36787946428571428571
11, 0.36787943923360590027
12, 0.36787944132128159906
13, 0.36787944116069116069
14, 0.36787944117216190629
15, 0.36787944117139718992
16, 0.36787944117144498469
17, 0.36787944117144217323
18, 0.36787944117144232942
19, 0.36787944117144232120
20, 0.36787944117144232161
```



Para terminar, vejamos como o Princípio da Inclusão-Exclusão também serve para resolver o Problema (B2) da Introdução.

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ e denotemos o conjunto dos primeiros n números naturais por $[n]$. Designando o conjunto $\{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } a_i\}$ por A_i, o número pedido dos inteiros positivos inferiores ou iguais a n, não divisíveis por nenhum dos elementos de A é o cardinal de $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}$.

Claramente $|A_i|$ é a parte inteira do número $\frac{n}{a_i}$, ou seja, $\left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor$. Como

$$A_i \cap A_j = \{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } a_i \text{ e } a_j\} = \{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } \mathrm{mmc}(a_i, a_j)\}$$

então $|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i,a_j)} \right\rfloor$. Mais geralmente, $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_{i_1},\ldots,a_{i_l})} \right\rfloor$, pelo que $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}|$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i, a_j)} \right\rfloor - \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_1, a_2, \ldots, a_t)} \right\rfloor.$$

No caso particular em que os elementos de A são todos primos entre si, o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a n que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j a_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_t} \right\rfloor.$$

Por exemplo, para $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$ e $n = 1000$, este número é igual a:

```
> B2 := proc(a_1,a_2,a_3,a_4,n::integer)
>    local A_1, A_2, A_3, A_4, A_1_2, A_1_3, A_1_4, A_2_3, A_2_4, A_3_4,
>          A_1_2_3, A_1_2_4, A_1_3_4, A_2_3_4, A_1_2_3_4;
>    A_1 := floor(n/a_1);
>    A_2 := floor(n/a_2);
>    A_3 := floor(n/a_3);
>    A_4 := floor(n/a_4);
>    A_1_2 := floor(n/(a_1*a_2));
>    A_1_3 := floor(n/(a_1* a_3));
>    A_1_4 := floor(n/(a_1*a_4));
>    A_2_3 := floor(n/(a_2*a_3));
>    A_2_4 := floor(n/(a_2*a_4));
>    A_3_4 := floor(n/(a_3*a_4));
>    A_1_2_3 := floor(n/(a_1*a_2*a_3));
>    A_1_2_4 := floor(n/(a_1*a_2*a_4));
>    A_1_3_4 := floor(n/(a_1*a_3*a_4));
>    A_2_3_4 := floor(n/(a_2*a_3*a_4));
>    A_1_2_3_4 := floor(n/(a_1*a_2*a_3*a_4));
>    RETURN(n - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + A_1_2 + A_1_3 + A_1_4 + A_2_3 + A_2_4 + A_3_4
           - (A_1_2_3 + A_1_2_4 + A_1_3_4 + A_2_3_4) + A_1_2_3_4);
> end;
> B2(2,3,5,7,1000);
```

228

Contemos agora o número $\phi(n)$ de inteiros positivos, inferiores a n, primos com n. Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ a factorização de n em números primos. Como os conjuntos

$$\Big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k,n) = 1\Big\}$$

e

$$\Big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } p_i \not| k \text{ para } i = 1, 2, \dots, t\Big\}$$

coincidem bastará aplicar a fórmula, acima deduzida, ao conjunto $A = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$. Imediatamente se conclui que o número $\phi(n)$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i} \Big\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \Big\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \Big\rfloor + \cdots + (-1)^t \Big\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_t} \Big\rfloor.$$

Como vimos em 1.3, a função

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \phi(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k,n) = 1\}| \end{array}$$

é a chamada *função de Euler*, muito importante em Teoria dos Números.

Para terminar, vejamos um processo simples de contar os números primos entre 2 e $n \geq 2$. O crivo de Eratóstenes[30] é um processo que permite enumerar todos os primos entre 1 e qualquer inteiro positivo k:

- Calcula-se $c = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$;
- Apagam-se, na sucessão $2, 3, 4, \ldots, k$, todos os múltiplos de $2, 3, 4, \ldots, c$ (com excepção dos próprios números $2, 3, 4, \ldots, c$);
- Os números que restam são os primos entre 1 e k.

Então, para determinar o número de primos entre 1 e k, bastará:

- determinar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_t$ entre 1 e $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$, usando o crivo de Eratóstenes;
- em seguida, determinar, com a ajuda da fórmula acima deduzida, quantos inteiros positivos inferiores ou iguais a n não são divisíveis por nenhum dos elementos de $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. Como os primos entre $\left\lfloor \sqrt{n} + 1 \right\rfloor$ e n são exactamente os inteiros positivos inferiores ou iguais a n (com excepção do 1) que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A, o seu número é igual a

$$M(n) = n - 1 - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_t} \right\rfloor.$$

  Concluindo, o número de primos entre 1 e n será igual a $t + M(n)$.

Relações de recorrência

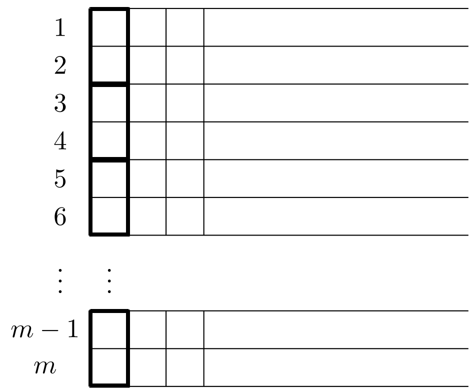
Recordemos o Problema (A6) do capítulo "Que é a Matemática Discreta?":

> *Consideremos um tabuleiro de xadrez e algumas peças (idênticas) de dominó tais que cada uma cobre precisamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Será possível dispor 32 dessas peças no tabuleiro de modo a cobri-lo, sem sobreposição de peças?* (Tal arranjo diz-se uma *cobertura perfeita* do tabuleiro por dominós.)

Não é difícil concluir que, em geral, um tabuleiro $m \times n$ possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos números m ou n é par:

Se o tabuleiro possui uma cobertura perfeita então o dobro do número de peças na configuração deverá ser igual a mn. Portanto $2|mn$ pelo que $2|m$ ou $2|n$. Reciprocamente suponhamos, sem perda de generalidade, que m é par. Nesse caso é evidente que cada coluna pode ser perfeitamente coberta (basta alinhar sucessivamente $m/2$ peças)

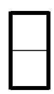
[30] Cf. `crivo.mws`.



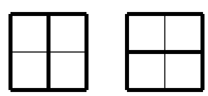
pelo que qualquer número n de colunas pode também ser coberto de modo perfeito.

Mais difícil é contar o número de coberturas perfeitas. Façamo-lo no caso mais simples de um tabuleiro $2 \times n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f(n)$ o número de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$. Comecemos por calcular $f(1), f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$:

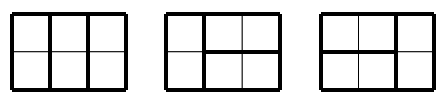
$f(1) = 1$:



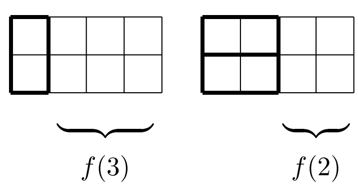
$f(2) = 2$:



$f(3) = 3$:



$f(4) = 5 = f(3) + f(2)$:

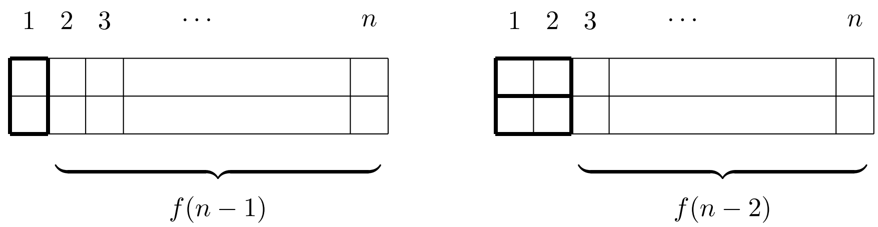


Analogamente, $f(5) = 8 = f(4) + f(3)$. Isto leva-nos a conjecturar que

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (n \geq 3).$$

Esta conjectura pode ser provada, por exemplo, do seguinte modo:

Para construir uma cobertura perfeita de um tabuleiro $2 \times n$ podemos colocar uma peça na vertical, a ocupar a coluna 1, e teremos depois $f(n-1)$ maneiras diferentes de cobrir o resto do tabuleiro, ou podemos colocar duas peças na horizontal, a ocupar as colunas 1 e 2, e cobrir depois o resto do tabuleiro, o que pode ser feito de $f(n-2)$ modos distintos:



Esta relação, conjuntamente com os valores iniciais $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$, determina univocamente a sequência dos números de coberturas perfeitas $f(1), f(2), f(3), \ldots$.

Por exemplo, $f(12)$ é igual a

$$f(11) + f(10) = 2f(10) + f(9) = 3f(9) + f(8) = \cdots = 21f(5) + 13f(4) = 233.$$

É claro que para valores muito grandes de n este método de cálculo de $f(n)$ não será praticável sem a ajuda de um computador[31], porque não temos aqui uma fórmula fechada para o valor de $f(n)$ mas sim uma *relação de recorrência* que estabelece o valor de f em n a partir de valores de f em inteiros anteriores a n.

Como podemos resolver relações de recorrência destas, isto é, como podemos obter, a partir da relação de recorrência, a respectiva fórmula fechada? É o que veremos agora.

Consideremos uma *sucessão* (infinita) de elementos de um conjunto S,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N}_0 & \to & S \\ & n & \mapsto & u(n). \end{array}$$

O valor $u(n)$ costuma representar-se simplesmente por u_n e é frequente apresentar uma sucessão dispondo sucessivamente as imagens da aplicação u:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots.$$

Muitas vezes uma sucessão é dada mediante a indicação do que se chama o seu *termo geral*, ou *termo de ordem* n (por exemplo, $u_n = n^2$, $u_n = \sin 2^n/(n+1)^2$, etc.). É uma situação cómoda pois, além de nesse caso ser possível calcular sem grandes problemas qualquer termo da sucessão, o estudo de várias propriedades (como a monotonia, convergência, etc.) fica muito facilitado. Usaremos a notação (u_n) para nos referirmos à sucessão $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Como vimos nos exemplos acima, nem sempre uma sucessão é definida por indicação do seu termo geral, mas sim por uma *relação de recorrência*: são dados uns tantos termos iniciais da sucessão, $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, e cada um dos seguintes determina-se a partir dos k anteriores por intermédio de uma relação que permanece invariável, $u_k = f(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$, $u_{k+1} = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, etc. Estas são as chamadas relações de recorrência para a sucessão (u_n). Ao número k chama-se *ordem* da relação de recorrência.

[31]Cf. `recorrencia.mws`.

Uma sucessão diz-se uma *solução* de uma relação de recorrência se os seus termos satisfizerem a relação. De entre todas as relações de recorrência destacam-se, não só pela sua simplicidade mas também pela frequência com que ocorrem, as chamadas *relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes*. São as do tipo

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n \geq k)}$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_k$ constantes.

O adjectivo "linear" refere-se ao facto de todos os valores de u ocorrerem como potências de expoente 1, enquanto que o adjectivo "homogéneo" refere-se ao facto de não existir termo independente (constante).

Por exemplo, $u_n = u_{n-1}^2 + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ não é linear, enquanto que $u_n = 3u_{n-1} + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ não é homogénea. Por outro lado, a relação $u_n = (n+2)u_{n-1} + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes (o primeiro coeficiente $n+2$ varia com n).

Exemplos. (1) As progressões geométricas de razão r satisfazem uma relação de recorrência homogénea linear de primeira ordem:

$$u_n = r u_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

(2) As progressões aritméticas de razão r podem ser vistas como sucessões satisfazendo relações de recorrência homogéneas lineares de segunda ordem: de $u_{n-1} = u_{n-2} + r$ e $u_n = u_{n-1} + r$ obtém-se, subtraindo a primeira identidade da segunda,

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

(3) A sucessão do número de coberturas perfeitas satisfaz uma relação de recorrência homogénea linear de segunda ordem.

Como em muitos problemas combinatoriais a solução aparece formulada em termos de uma relação de recorrência, torna-se imperativo saber manipulá-las e conhecer métodos que permitam obter uma fórmula explícita para o termo geral da respectiva sucessão.

Convirá desde já avisar que não existem métodos gerais que nos permitam resolver todas as relações de recorrência. Uma estratégia possível ("ingénua") será calcular um número razoável de termos e tentar intuir a lei de formação do termo geral, que pode depois ser confirmada pelo método de indução matemática. Com esta estratégia, algumas tentativas, mesmo em casos simples, mostrarão que não se trata de tarefa fácil.

Por exemplo, no caso das relações de recorrência lineares de primeira ordem, temos $u_1 = au_0$, $u_2 = au_1 = a^2 u_0$, etc., sendo fácil ver que, para qualquer $n \geq 1$, $u_n = a^n u_0$. Está assim encontrado o termo geral neste caso. No entanto, para as de segunda ordem, dados u_1 e u_2 e duas constantes a e b, temos:

$$\begin{aligned}
u_2 &= au_1 + bu_0 \\
u_3 &= au_2 + bu_1 = (a^2 + b)u_1 + abu_0 \\
u_4 &= au_3 + bu_2 = (a^3 + 2ab)u_1 + (a^2 b + b^2)u_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Não é fácil descortinar aqui uma lei de formação que permita conjecturar o que deverá ser u_n em função de n, a, b, u_0 e u_1. É claro que para as sucessões recorrentes lineares de ordem superior a situação será ainda pior.

Curiosamente, como veremos, o caso das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes é tratável de uma forma sistemática, embora as técnicas existentes se possam revelar muito trabalhosas na prática. Apesar de ser um método indirecto e pouco natural, é elegante e engenhoso.

Restringemo-nos então à classe das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes, isto é, das relações de recorrência da forma

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n = k, k+1, \dots)} \qquad (*)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_k$ são constantes. Podemos sempre supor que $a_k \neq 0$ pois, caso contrário, a relação reduz-se a uma de ordem inferior.

Associemos à relação de recorrência $(*)$, a equação

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0,$$

chamada *equação característica* de $(*)$. Esta equação tem k raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, chamadas *raízes características* de $(*)$. Claro que poderão ser números complexos, não todos distintos. Como $a_k \neq 0$, são todas não nulas.

Teorema 1. *Seja α um número complexo não nulo. A sucessão*

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n, \dots$$

é solução da relação de recorrência $(*)$ se e só se α é uma raiz característica.

Prova. A sucessão (u_n), onde $u_n = \alpha^n$, é uma solução de $(*)$ se e só se, para $n \geq k$,

$$\alpha^n = a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_k \alpha^{n-k}$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha^{n-k}(\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k) = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$, esta equação é ainda equivalente a

$$\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k = 0.$$

Portanto (α^n) é uma solução de $(*)$ se e só se α é uma raiz característica. □

Corolário. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ as raízes características de $(*)$. Para quaisquer constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$ a sucessão de termo geral*

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$$

é uma solução de $(*)$.

Prova. É um exercício simples verificar que sempre que $(u_n^1), (u_n^2), \ldots, (u_n^t)$ são soluções de $(*)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_t$ são constantes então a sucessão de termo geral

$$u_n = c_1 u_n^1 + c_2 u_n^2 + \cdots + c_t u_n^t$$

ainda é solução de $(*)$. Combinando este facto com o Teorema 1 obtemos imediatamente o Corolário. □

No caso das raízes características serem todas distintas podemos obter <u>todas</u> as soluções de $(*)$:

Teorema 2. *Suponhamos que as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ da relação de recorrência $(*)$ são distintas duas a duas. Neste caso, se uma sucessão de termo geral u_n é solução de $(*)$, existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que*

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n.$$

Prova. Seja (u_n) uma solução da relação de recorrência $(*)$. Uma vez que $(*)$, conjuntamente com os k valores iniciais $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, determinam completamente a sucessão (u_n), bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que a sucessão de termo geral $c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \cdots + c_k\alpha_k^n$ satisfaz $(*)$ e tem como primeiros k elementos os valores $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Pelo Corolário, bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = u_0 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = u_1 \\ \quad\vdots \\ c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{k-1} = u_{k-1}. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de k equações lineares com k incógnitas. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

deste sistema é uma matriz muito especial, chamada *matriz de Vandermonde*. O seu determinante é dado por

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

(a prova deste facto encontra-se em muitos livros de Álgebra Linear). Como as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas distintas, este determinante é diferente de zero. Isto quer dizer que o sistema possui exactamente uma solução. □

Exemplos. A sucessão de Fibonacci $F(1), F(2), F(3), \ldots$ do problema (B4) da Introdução também é definida pela relação $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$, mas desta vez sujeita às condições iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$.

Procedimento `Maple` que calcula, por recursão, os termos da sucessão de Fibonacci:

```
> Fibonacci := proc(n::posint) option remember;
>    if n=1 or n=2 then RETURN( 1 ); fi;
>    Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
> end:
>
> seq(Fibonacci(i), i=1..20);
```

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$

As raízes da equação característica $x^2 - x - 1 = 0$ desta relação de recorrência são o *número de ouro* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o seu conjugado $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então, pelo Teorema 2, os números de Fibonacci são dados por

$$F(n) = c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

para algum par de constantes c_1 e c_2. As condições iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$ permitem-nos determinar tais constantes. Com efeito,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = F(0) = 0 \\ c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = F(1) = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

```
> sol := solve({    c1 * evals[1] + c2 * evals[2] = 1,
>     c1 * evals[1]^2 + c2 * evals[2]^2 = 1
>     },
>     {c1,c2});
```

$sol := \{c2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, c1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\}$

Concluindo, os números de Fibonacci satisfazem a fórmula

$$\boxed{F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].}$$

```
> c1 := sqrt(5)/5; c2 := -sqrt(5)/5;
> evals := solve(x^2-x-1,x);
> seq(simplify(c1 * evals[1]^i + c2 * evals[2]^i), i=1..20);
```

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$

Fica assim resolvido o Problema (B4) da Introdução: o número de pares de coelhos existentes na ilha ao fim de n meses será igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Consequentemente, o número $f(n)$ de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$ é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big],$$

pois $f(n) = F(n+1)$.

Teste. *Pretendemos transmitir mensagens codificadas através de um determinado canal de comunicação. Essas mensagens são formadas por palavras de comprimento n, construídas com os símbolos ‘0’, ‘‘1 e ‘2’ e sujeitas à condição “não podem aparecer palavras com dois símbolos ‘2’ consecutivos”. Seja $T(n)$ o* tamanho *deste código, isto é, o número de palavras que podemos transmitir com ele. Determine uma relação de recorrência que $T(n)$ satisfaça e determine explicitamente esse número, resolvendo a relação de recorrência.*

Solução. De acordo com a definição do código, $T(1) = 3$ (as únicas palavras de comprimento 1 são: ‘0’, ‘‘1 e ‘2’) e $T(2) = 8$:

$$00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21.$$

Para $n \geq 3$ tem-se $T(n) = 2\,T(n-1) + 2\,T(n-2)$. De facto, as palavras de comprimento n que terminam em 0, bem como as que terminam em 1, são em número igual a $T(n-1)$:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\;\cdots\;}\boxed{}}_{T(n-1)}\boxed{0} \qquad\qquad \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\;\cdots\;}\boxed{}}_{T(n-1)}\boxed{1}$$

No entanto, nas palavras de comprimento n que terminam em 2, a penúltima posição $n-1$ já só pode conter os números 0 ou 1, pelo que as palavras são, no total, em número igual a $2\,T(n-2)$:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\;\cdots\;}}_{T(n-2)}\boxed{0}\boxed{2} \qquad\qquad \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\;\cdots\;}}_{T(n-2)}\boxed{1}\boxed{2}$$

A equação característica desta relação de recorrência é igual a $x^2 - 2x - 2 = 0$, que tem raízes $x = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Portanto,

$$T(n) = c_1(1+\sqrt{3})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{3})^{n-1}.$$

Das condições iniciais tiramos

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3})^0 + c_2(1-\sqrt{3})^0 = 3 \\ \\ c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ \\ c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \\ c_2 = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\boxed{T(n) = \tfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{n-1} + \tfrac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{n-1}.}$$

Se as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ não forem todas distintas então

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \tag{1}$$

não é uma solução geral da relação de recorrência. Por exemplo, a relação de recorrência $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ tem como equação característica $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$. Neste caso (1) é igual a

$$u_n = c_1 2^n + c_2 2^n = (c_1 + c_2)2^n = c2^n$$

onde $c = c_1 + c_2$ é uma constante. Temos então uma só constante c e não será sempre possível escolhê-la de modo a que os dois valores iniciais u_1 e u_2 sejam satisfeitos. Por exemplo, se $u_0 = 1$ e $u_1 = 3$ teria que ser $c = 1$ e $2c = 3$, o que é manifestamente impossível. Portanto, $u_n = c2^n$ não é uma solução geral daquela relação (isto é, nem toda a solução da relação de recorrência pode ser expressa na forma $c2^n$ para alguma constante c).

O teorema seguinte, que não demonstraremos, diz-nos como determinar uma solução geral nestes casos. A ideia da demonstração é a mesma da do Teorema 2, mas naturalmente mais técnica e trabalhosa.

Teorema 3. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ as raízes distintas da equação característica da relação de recorrência (∗), com multiplicidades, respectivamente, $e_1, e_2, \ldots, e_t$. Uma sucessão de termo geral u_n é solução de (∗) se e só se existem constantes*

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1e_1}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2e_2}, \ldots, c_{t1}, c_{t2}, \ldots, c_{te_t}$$

tais que

$$\begin{aligned} u_n \quad = \quad & \Big(c_{11} + c_{12}n + \cdots + c_{1e_1}n^{e_1-1}\Big)\alpha_1^n + \Big(c_{21} + c_{22}n + \cdots + c_{2e_2}n^{e_2-1}\Big)\alpha_2^n + \cdots + \\ & + \Big(c_{t1} + c_{t2}n + \cdots + c_{te_t}n^{e_t-1}\Big)\alpha_t^n. \end{aligned}$$

Exemplo. Determinemos a solução da relação de recorrência

$$u_n = -u_{n-1} + 3u_{n-2} + 5u_{n-3} + 2u_{n-4} \quad (n = 4, 5, \ldots)$$

sujeita às condições iniciais $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2$. A equação característica $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ tem raízes -1 e 2, sendo -1 raiz de multiplicidade 3. Portanto, a parte da solução geral correspondente à raiz -1 é

$$(c_{11} + c_{12}n + c_{13}n^2)(-1)^n,$$

enquanto que a parte correspondente à raiz 2 é $c_{21}2^n$. As constantes estão sujeitas às condições iniciais

$$\begin{cases} c_{11} + c_{21} & = & 1 \\ -c_{11} - c_{12} - c_{13} + 2c_{21} & = & 0 \\ c_{11} + 2c_{12} + 4c_{13} + 4c_{21} & = & 1 \\ -c_{11} - 3c_{12} - 9c_{13} + 8c_{21} & = & 2, \end{cases}$$

pelo que, resolvendo o sistema, obtemos $c_{11} = 7/9$, $c_{12} = -1/3$, $c_{13} = 0$ e $c_{21} = 2/9$. Em conclusão, a solução é

$$u_n = \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{3}n\right)(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{9} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

O sucesso deste método depende da nossa capacidade em determinar as raízes da equação característica, o que poderá por vezes não ser possível. No caso de tal ser possível, será ainda necessário resolver um sistema de equações lineares. Se a ordem da relação de recorrência for k, este sistema tem k equações com k incógnitas. Portanto a aplicação deste método, na prática, poderá ser muito problemática.

Se a relação de recorrência não for homogénea ou linear, com coeficientes constantes, não se conhecem métodos para a resolver de uma forma sistemática (a não ser para alguns tipos de relações não homogéneas nas quais o termo independente tem uma forma muito especial — é um polinómio ou uma exponencial). Cada caso terá que ser analisado individualmente. Por exemplo, para resolver a relação de recorrência não homogénea $u_n = u_{n-1} + n^3$, para $n = 1, 2, \ldots$, sujeita à condição $u_0 = 0$, podemos, por sucessivas iterações, obter

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + n^3 \\ &= u_{n-2} + (n-1)^3 + n^3 \\ &= \cdots \\ &= u_1 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3. \end{aligned}$$

Assim, u_n é a soma dos primeiros n cubos. Podemos determinar uma expressão simples para esta soma? Usando a relação de recorrência podemos determinar os primeiros valores de u_n e tentar encontrar um padrão:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2 \\ u_3 &= 9 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2 \\ u_4 &= 36 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\ u_5 &= 100 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2. \end{aligned}$$

Como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

podemos conjecturar que

$$u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

o que pode ser confirmado pelo método de indução matemática ou pelos métodos que vimos na Secção 1.2.

Apêndice

Para terminar, vejamos que no caso não homogéneo, é possível em alguns casos uma abordagem sistemática que nos conduza à solução. Uma recorrência linear, não necessariamente homogénea, de coeficientes constantes é dada por uma equação do tipo

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n), \tag{1}$$

onde o termo independente $g(n)$ é uma função de n que toma valores reais. A uma recorrência deste tipo podemos, esquecendo a função g, associar a recorrência homogénea

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}. \tag{2}$$

Será de esperar que as soluções de (1) estejam relacionadas com as soluções de (2). De facto, é fácil provar que:

Teorema 4. *Seja*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n)$$

uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes e seja (α_n) *uma solução desta relação de recorrência. Se* (β_n) *é também uma solução dessa relação de recorrência, então a sucessão* $(\gamma_n) = (\beta_n - \alpha_n)$ *é uma solução da relação de recorrência homogénea*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}.$$

Reciprocamente, se (γ_n) *é uma solução desta relação de recorrência homogénea, então a sucessão* $(\beta_n) = (\alpha_n + \gamma_n)$ *é uma solução da relação de recorrência inicial.*

Assim, para determinar a expressão geral das soluções de uma dada relação de recorrência linear com coeficientes constantes, bastará:

(1) Obter a expressão geral das soluções (γ_n) da relação de recorrência homogénea associada;

(2) Identificar uma solução particular (β_n) da relação de recorrência dada;

(3) A expressão geral das soluções (α_n) da relação de recorrência é dada pela soma $(\alpha_n) = (\beta_n + \gamma_n)$.

O passo (1) pode realizar-se pelo método apresentado no caso homogéneo, mas a realização de (2) depende da função g envolvida. Em geral, não há nenhuma garantia que (2) se possa efectuar de modo fácil; os casos mais simples são aqueles em que g é polinomial ou exponencial. A tabela seguinte fornece-nos soluções particulares para esses casos:

Soluções particulares para a relação de recorrência linear com coeficientes constantes
$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n)$
onde $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1} x - a_k \qquad (*)$
é a equação característica da relação de recorrência homogénea associada

Função f	**Condições**	**Solução particular**
$f(n) = b\lambda^n$	λ não é raíz de $(*)$	$(\beta\lambda^n)$
$(b, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$	λ é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(\beta n^m \lambda^n)$
$f(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_r n^r$	1 não é raíz de $(*)$	$(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)$
$(r \in \mathbb{N}, b_0, \ldots, b_r \in \mathbb{R}, b_r \neq 0)$	1 é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r))$
$f(n) = bn^r\lambda^n$	λ não é raíz de $(*)$	$((\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$
$(r \in \mathbb{N}, b, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$	λ é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$