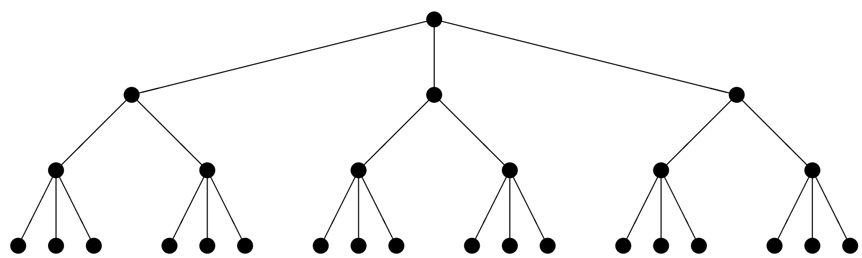
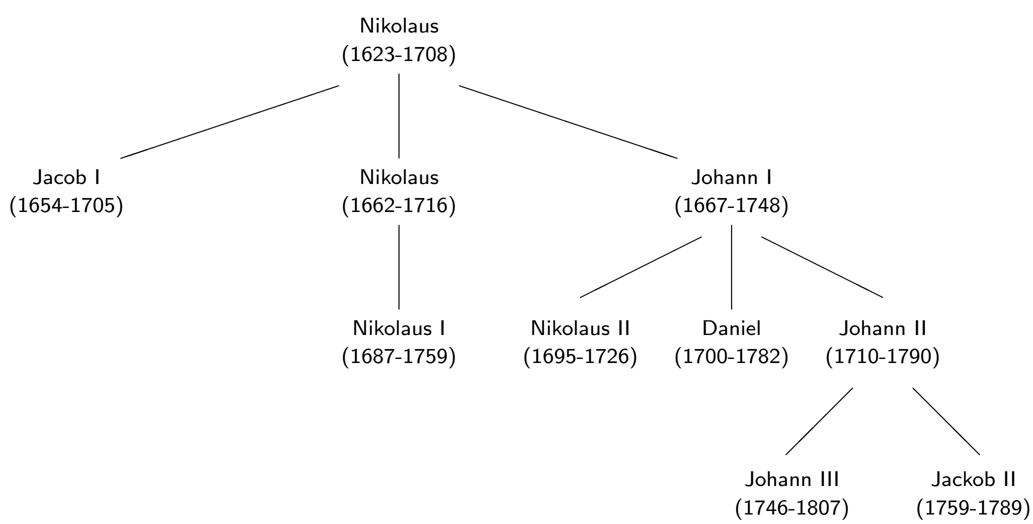
3.2. Árvores

Todos nós estamos familiarizados com a ideia de árvore genealógica:

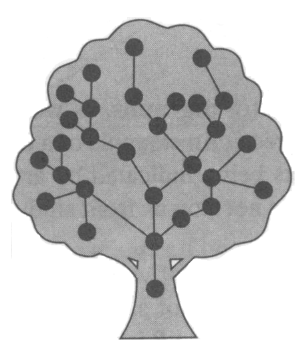


Tal diagrama é um grafo no qual os vértices representam membros da família e as arestas representam relações de parentesco (descendência). Por exemplo,

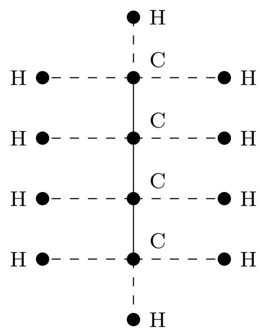


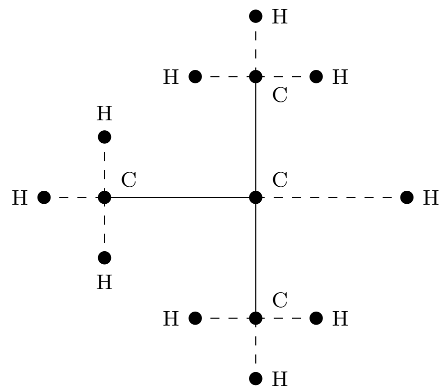
representa a famosa família de matemáticos suíços Bernoulli.

Os grafos que representam árvores genealógicas são exemplos de um tipo especial de grafo, que abordaremos nesta secção, chamado *árvore*.



Outros exemplos de árvores são dados por algumas moléculas orgânicas — os vértices representando os átomos e as arestas as ligações entre eles:

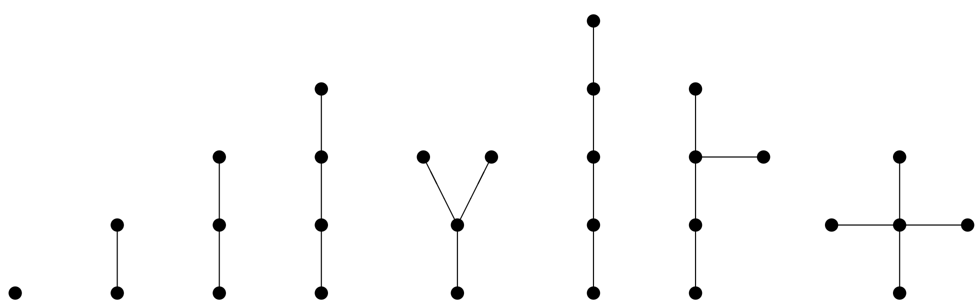




A. Cayley foi o primeiro a estudar árvores de modo sistemático[34]. Mais tarde[35], aplicou esse estudo à química orgânica, mostrando a sua utilidade na enumeração de compostos químicos. Esta enumeração conduziu-o à descoberta de compostos desconhecidos.

Por *árvore* entende-se um grafo simples, conexo, sem ciclos.

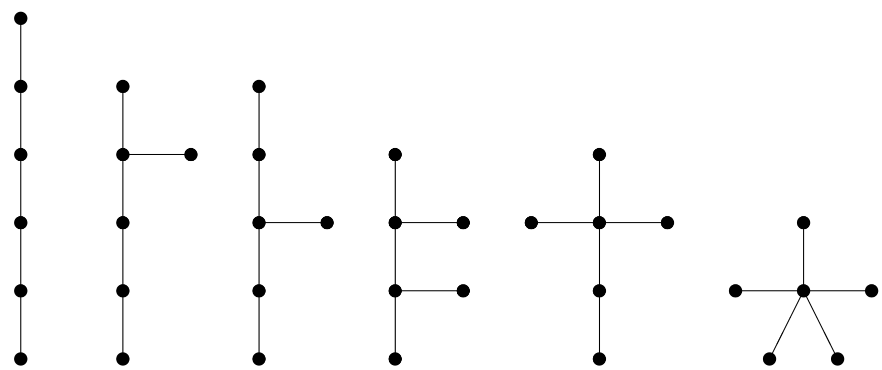
A figura seguinte contém todas as árvores estruturalmente diferentes (ou seja, não isomorfas) com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 vértices.



(1) (2) (3) (4) (5)

[34]Nos artigos [A. Cayley, *On the theory of the analytical forms called trees*, Philosophical Magazine 13 (1857) 172-176] e [A. Cayley, *On the theory of the analytical forms called trees, part II*, Philosophical Magazine 18 (1859) 374-378].

[35]Nos artigos [A. Cayley, *On the mathematical theory of isomers*, Philosophical Magazine 47 (1874) 444-446] e [A. Cayley, *On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*, Rep. Brit. Advance Sci. 45 (1875) 257-305].



(6)

Como veremos, as árvores têm "boas" propriedades. Muitas vezes, na tentativa de provar um resultado geral para grafos, começa-se por tentar prová-lo para árvores. De facto, existem muitas conjecturas que ainda não foram provadas para grafos arbitrários mas que já se sabe serem verdadeiras para as árvores.

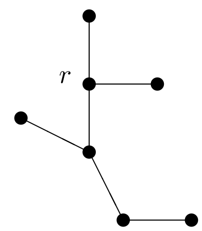
Em qualquer grafo conexo, dados dois vértices arbitrários distintos, existe sempre um caminho sem repetição de vértices ligando-os. O resultado seguinte diz-nos que as árvores são precisamente os grafos conexos nos quais cada par de vértices distintos está ligado por exactamente um caminho sem repetição de vértices:

Teorema 1. *Um grafo simples G é uma árvore se e só se quaisquer dois vértices de G estão ligados por um único caminho sem repetição de vértices.*

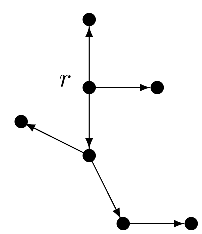
Prova. Seja G uma árvore e sejam x e y dois vértices de G. Como G é conexo, existe um caminho sem repetição de vértices que os liga. Resta provar que este caminho é único. Se existisse outro caminho, o caminho formado pela combinação do primeiro, de x para y, com o caminho de y para x obtido seguindo o segundo caminho na direcção de y para x, formaria um ciclo, o que seria uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que existe um único caminho sem repetição de vértices unindo quaisquer dois vértices de G. Então G é claramente conexo. Além disso, não poderá ter ciclos: se contivesse um ciclo, contendo os vértices x e y, existiriam evidentemente dois caminhos sem repetição de vértices unindo x a y (pois qualquer ciclo que passe por x e y é constituído por dois caminhos sem repetição de vértices, um unindo x a y, o outro unindo y a x). □

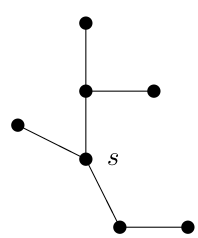
Fixando um vértice qualquer r de uma árvore é possível, usando o teorema anterior, dar uma direcção a todas as arestas do seguinte modo: como existe um único caminho de r para cada um dos restantes vértices do grafo, direccionamos cada aresta usando esses caminhos. Por exemplo, na árvore

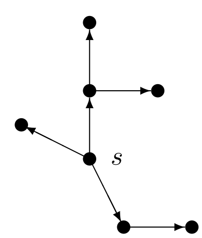


fixando o vértice r indicado, obtemos



Este grafo dirigido diz-se uma *árvore com raiz* r. Outra escolha de raiz produzirá uma outra árvore com raiz:





Teorema 2. *Uma árvore com* n *vértices possui* $n-1$ *arestas.*

Prova. Fixando um vértice qualquer r, e construindo a respectiva árvore com raiz r, é evidente que existe uma correspondência bijectiva entre as arestas da árvore e os vértices diferentes de r (a cada seta corresponde o respectivo vértice terminal). Como há $n-1$ vértices diferentes de r, a árvore tem $n-1$ arestas. □

A terminologia para as árvores inspira-se na botânica e na genealogia. Seja G uma árvore com raiz r. Se v é um vértice diferente de r, o *pai* (ou *ascendente* de v é o único vértice u para o qual existe uma aresta dirigida de u para v. Nesse caso, v diz-se um *descendente* ou *filho* de u. Um vértice de G é uma *folha* se não tiver descendentes. Os vértices que têm descendentes dizem-se *vértices internos.*

G diz-se uma *árvore* m*-ária* se todo o vértice interno não tiver mais de m descendentes. No caso $m = 2$, a árvore chama-se uma *árvore binária.* A árvore diz-se uma *árvore* m*-ária plena* se todo o vértice interno tiver exactamente m descendentes.

Qualquer folha tem grau 1. Sabemos pelo Lema dos apertos de mão (Proposição 1 da Secção 3.1) que a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro do número das arestas. Se G for uma árvore com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e m arestas, então $m = n - 1$ pelo Teorema 2. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2m = 2(n-1).$$

Consequentemente, no caso de G não ser K_1, como não existem vértices isolados, existem pelo menos duas folhas. Podemos assim afirmar que toda a árvore diferente de K_1 possui pelo menos duas folhas.

Teorema 3. *Uma árvore m-ária plena com i vértices internos possui $n = m\,i + 1$ vértices.*

Prova. Todo o vértice, com excepção da raiz, é descendente de um vértice interno. Como cada um dos i vértices internos tem m descendentes, existem $m\,i$ vértices na árvore além da raiz. Assim, no total existem $m\,i + 1$ vértices. □

Sejam n o número de vértices, i o número de vértices internos e l o número de folhas de uma árvore com raiz. Se a árvore for m-ária plena é possível, a partir de qualquer um dos números n, i ou l determinar os outros dois:

Teorema 4. *Uma árvore m-ária plena com*

(a) *n vértices tem $i = \dfrac{n-1}{m}$ vértices internos e $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ folhas,*

(b) *i vértices internos tem $n = m\,i + 1$ vértices e $l = (m-1)i + 1$ folhas,*

(c) *l folhas tem $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ vértices e $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ vértices internos.*

Prova. Evidentemente $n = i + l$. Esta igualdade, em conjunto com a do Teorema 3, permite provar facilmente as três afirmações. Provaremos somente a primeira, uma vez que as outras duas se podem provar de modo análogo:

Pelo Teorema 3, $n = m\,i + 1$, ou seja $i = \dfrac{n-1}{m}$. Então

$$l = n - i = n - \frac{n-1}{m} = \frac{(m-1)n+1}{m}.$$

□

Bibliografia

[1] Carlos André e Fernando Ferreira, *Matemática Finita*, Universidade Aberta, 2000.

[2] Stephen Barnett, *Discrete Mathematics: Numbers and Beyond*, Prentice Hall, 1998.

[3] Jon Barwise e John Etchemendy, *Language, Proof and Logic*, CSLI Publications, 1999.

[4] James Hein, *Discrete Structures, Logic and Computability*, Jones and Bartlett Publ., 1995.

[5] James Hein, *Maple Experiments in Discrete Mathematics*, Portland State University, Janeiro 2005.

[6] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, McGraw-Hill, 1995.

[7] Kenneth H. Rosen, *Exploring Discrete Mathematics with Maple*, McGraw-Hill, 1997.

[8] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1972.