Matemática com `Maple`

O `Maple` é um sistema de álgebra computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. Estes exercícios ajudam a começar a trabalhar com o programa.

O commando de linha básico

O sinal

```
>
```

indica que o `Maple` está à espera de *input*. Escreva os comandos directamente após este sinal e depois prima a tecla *enter*. Por exemplo, a expressão $23 \cdot 85 + 14/43$ calcula-se com o comando

```
> 23*85 + 14/43;
```

o que gera o output

$$\frac{63310}{43}$$

Aritmética do `Maple`

No exemplo acima o `Maple` usou aritmética exacta; as respostas são números reais exactos. Porque cada valor introduzido era um inteiro, o `Maple` assume que queremos ver aritmética exacta onde tal seja possível. Se quisermos respostas na forma decimal, uma maneira é usar a notação decimal na expressão introduzida. Por exemplo, escrevendo 14.0 em vez de 14

```
> 23*85 + 14.0/43;
```

$$1955.325581$$

Para fazer cálculos sem mostrar o resultado, usa-se ":" em vez de ";":

```
> A:=1-2/3: B:=1/3:
```

```
> A+B;
```

$$\frac{2}{3}$$

O símbolo (%) refere o valor obtido no último cálculo.

```
> 1/3+%;
```

$$1$$

```
> 3/5-%;
```

$$\frac{-2}{5}$$

Para obter o resultado na forma decimal, usa-se a função **evalf**

```
> evalf(%);
```

$$-.4000000000$$

Pode especificar-se o número de dígitos:

```
> evalf(1/3,20);
```

$$.33333333333333333333$$

```
> evalf(sqrt(2));
```

$$1.414213562$$

Exponenciação:

```
> 5^(1/2);
```

$$\sqrt{5}$$

```
> 2^50;
```

$$1125899906842624$$

Algumas constantes:

```
> Pi; evalf(Pi);
```

$$\pi$$
$$3.141592654$$

```
> exp(1); evalf(exp(1));
```

$$\mathbf{e}$$
$$2.718281828$$

```
> I^2;
```

$$-1$$

Mais alguma informação básica sobre o `Maple`

O valor de uma expressão pode ser dada por meio de uma fracção:

```
> (121/14-3^2)*11^2;
```

$$\frac{-605}{14}$$

Se pretender o resultado na forma decimal, basta usar **evalf**:

```
> evalf(%);
```

$$-43.21428571$$

Se pretende uma aproximação com um certo número de dígitos:

```
> evalf(%,4);
```

$$-43.21$$

O número π em `Maple`:

```
> Pi;
```

$$\pi$$

Aproximações com 6 e 20 dígitos, respectivamente:

```
> evalf(Pi,6); evalf(Pi,20);
```

$$3.14159$$
$$3.1415926535897932385$$

Outro exemplo:

```
> sqrt(3);
```

$$\sqrt{3}$$

```
> evalf(sqrt(3),4);
```

$$1.732$$

Funções básicas:

```
> exp(x);
```

$$e^x$$

```
> exp(2);
```

$$e^2$$

```
> sin(Pi/2);
```

$$1$$

Somatórios(exemplos):

```
> sum(k*k, k=0..3);
```

$$14$$

```
> sum(2*k-1,k=1..50);
```

$$2500$$

```
> seq(sum(k,k=1..n), n=1..30);
```

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465$$

```
> sum(2*k-1,k=1..50);
```

$$2500$$

```
> sum(i,i=1..n);
```

$$\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

Polinómios

```
> (y+x*(y+z))^3;
```

$$(y + x(y + z))^3$$

```
> expand(%);
```

$$y^3 + 3xy^3 + 3y^2xz + 3x^2y^3 + 6x^2y^2z + 3yx^2z^2 + x^3y^3 + 3x^3y^2z + 3x^3yz^2 + x^3z^3$$

```
> collect(%,x);
```

$$(y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3)x^3 + (3y^3 + 6y^2z + 3yz^2)x^2 + (3y^3 + +3y^2z)x + y^3$$

```
> factor(%);
```

$$(y + xy + xz)^3$$

<u>Exercício 1</u>. Factorize e indique as raízes do polinómio

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$$

<u>Um exemplo sobre juros</u>. Pretende-se um modelo para calcular o capital acumulado a partir de uma determinada quantia de dinheiro, sabendo que o juro é de 10% ao ano. Começando com um exemplo, suponhamos que a quantia inicial é de 1000 euros.

```
> p(0)=1000;
```

$p(0) = 1000$

Para nos podermos referir a esta equação mais tarde vamos dar-lhe um nome, por exemplo, eq0.

```
> eq0:=%;
```

$p(0) = 1000$

Vamos atribuir também um nome à equação $j = 0.1$. (Note-se que $p(0) + jp(0)$ é a quantia obtida no final do primeiro ano de depósito.)

```
> eq1:=(j=.1);
```

$eq1 := j = .1$

Denotando por $p(1)$ o total do depósito no final do primeiro ano, temos a equação:

```
> p(1)=p(0)+j*p(0);
```

$p(1) = p(0) + jp(0)$

Se quisermos saber o valor de p(1) para os valores que assumimos no início, basta usar as equações eq0 e eq1 para especificar esses valores, com o comando subs. A seguir ilustra-se a sequência dos cálculos:

A rotina **subs** permite obter valores para uma expressão envolvendo variáveis pondo

subs(variável1=certa coisa1, variável2=certa coisa2, ..., variáveln=certa coisan, expressão)

Usando esta rotina:

```
> subs(eq0,eq1,%);
```

$p(1) = 1100.0$

Exercício 2. Use $p(1)$ para determinar o capital em depósito após o primeiro ano, supondo que o capital inicial foi de 2500 euros e o juro anual é de 6%.

Claro que agora nos interessa uma fórmula que permita calcular o capital ao fim de cada n anos. O capital no final do ano $n + 1$ pode exprimir-se em função do capital no final do ano n por meio da igualdade:

```
> p(n+1)=p(n)+i*p(n);
```

$p(n + 1) = p(n) + ip(n)$

Uma equação deste tipo é dita de recorrência. um cálculo com lápis e papel leva facilmente ao valor de cada $p(n)$ em função de $p(0)$. Mas vamos usar o Maple para isso, dando simultaneamente um nome à equação obtida.

```
> eqn:=p(n)=rsolve(%,p(n));
```

$eqn := p(n) = p(0)(1 + i)^n$

Isto pode ser usado para criar uma função que, a partir dum dado capital inicial $p(0)$, calcula o capital que se tem ao fim de n anos. A fórmula para $p(n)$ é:

```
> subs(eqn,p(n));
```

$$p(0)(1+i)^n$$

Uma função que calcula esta expressão em função de n e i é:

```
> f:=unapply(%,n,i);
```

$$f := (n, i) \to p(0)(1+i)^n$$

Portanto, o capital após 10 anos à taxa de 18% é:

```
> f(10,.18);
```

$$5.233835554 p(0)$$

Para $p(0) = 1000$ tem-se:

```
> subs(p(0)=1000,%);
```

$$5233.835554$$

Exercício 3. Use a função f para determinar qual o capital que terá num certo banco daqui a 9 anos, onde depositou 1500 euros no dia 31 de Dezembro de 2001 a uma taxa anual de 15%.

Iteração

(a) Iteração sobre uma progressão aritmética (*for loop*):

```
> for i from 5 to 11 by 3 do
> i*i;
> od;
```

25
64
121

(b) Iteração sobre os elementos de uma lista (*for loop*):

```
> mylist:=[5,8,11]:
> for i in mylist do
> i*i;
> od;
```

25
64
121

Alternativamente:

```
> mylist:={5,8,11}:
> for i in mylist do
> i*i;
> od;
```

$$25$$
$$64$$
$$121$$

Exercício 4. Calcule o cubo dos números 2, 4, 8 e 248.

(c) Iterações mais gerais (*while loop*):

```
> i:=3:
> while i<=9 do
> print(i*i);
> i:=i+2;
> od:
```

$$9$$
$$25$$
$$49$$
$$81$$

```
> i:=1:
> while i^7 < 150 do
> print(i);
> i:=i+i^2;
> od:
```

$$1$$
$$2$$

Também se pode combinar o *for* com o *while*:

```
> for i from 3 to 44 while i^2<50 do
> i, i^2;
> od;
```

$$3, 9$$
$$4, 16$$
$$5, 25$$
$$6, 36$$
$$7, 49$$

Exercício 5. Use um *while loop* para determinar todos os valores inteiros positivos n tais que $n^3 < 500$.

Exercício 6. Determine o valor de $\sqrt{n}$ para todo o n de 1 a 10,

(a) usando um *for loop*.

(b) usando um *while loop*.

<u>Exercício 7</u>. Use o `Maple` para resolver o Exercício 8(d) da Folha TP-3 (página 2): $n^3 - n$ *é divisível por 3 para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, ou seja, o resto da divisão inteira de $n^3 - n$ por 3 é igual a zero para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
A instrução do Maple para o cálculo do resto da divisão inteira de m por n é **irem(m,n)**.

(a) Base indutiva: calcule

```
> irem(1^3-1,3);
```

(b) Hipótese indutiva: `irem(`$n^3 - n, 3$`)=0`.

Passo indutivo: vamos calcular a diferença entre $(n+1)^3 - (n+1)$ e $n^3 - n$:

```
> (n+1)^3-(n+1)-(n^3-n);
> expand(%);
```

A expressão que obteve representa claramente um múltiplo de 3. Como, por hipótese indutiva, $n^3 - n$ é múltiplo de 3, conclui-se que $(n+1)^3 - (n+1)$ também é múltiplo de 3.

Funções e procedimentos

Uma função pode ser definida facilmente em `Maple` usando o operador $->$. Para uma função de p variáveis $v_1, v_2, \ldots, v_p$ a sintaxe é:

$$\mathbf{(v1, v2, ..., vp) -> exp}$$

onde **exp** é uma expressão escrita explicitamente como uma função das variáveis $v_1, v_2, \ldots, v_p$ que corresponde ao resultado dado pela função.
Por exemplo:

```
> f_1:=x->(x-1)^2:
> f_2:=(x,y)->xy:
> f_3:=(a,b,c)-> a and b or not c:
```

Podemos agora calcular o valor das funções para determinados valores das variáveis:

```
> f_1(7);
```

$$36$$

```
> f_2(2,-3);
```

$$-6$$

```
> f_3(true,true,false);
```

true

Podemos também aplicar a função a valores indeterminados:

```
> f_1(t);
```

$$(t-1)^2$$

```
> f_1(a/b);
```

$$(\frac{a}{b}-1)^2$$

Se for necessário ver qual a actual definição de f, usa-se o comando **eval**:

```
> eval(f_1);
```

$$x \rightarrow (x-1)^2$$

Um procedimento consiste em várias instruções delimitadas pelas duas palavras reservadas **proc** e **end**.

A seguir vamos usar procedimentos com a seguinte sintaxe simples:

proc(v1,v2,...vp)
<instrução1>;
<instrução2>;
...
<instruçãon>;
end

Um exemplo:

```
> f:=proc(x,y)
> if x<y then x+y
> else x*y fi;
> end:
```

Note que usamos um **if**, com a seguinte sintaxe:

if <condição1> then <expressão1>
else <expressão2> fi

Aqui **fi** está em vez de *end if*.

Usando o procedimento acima podemos agora calcular valores de $f(x, y)$:

```
> f(1,2);
```

$$3$$

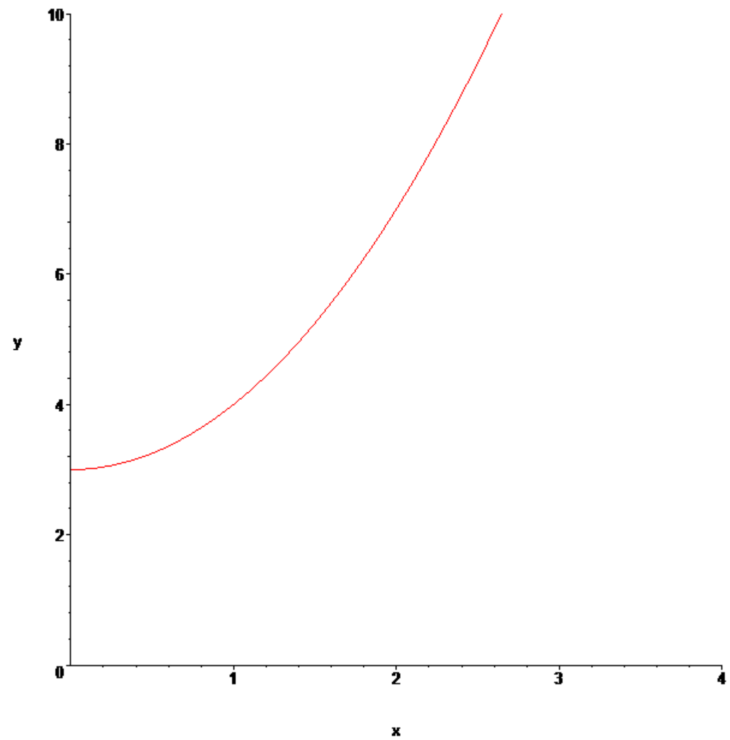
```
> f(2,1);
```

$$2$$

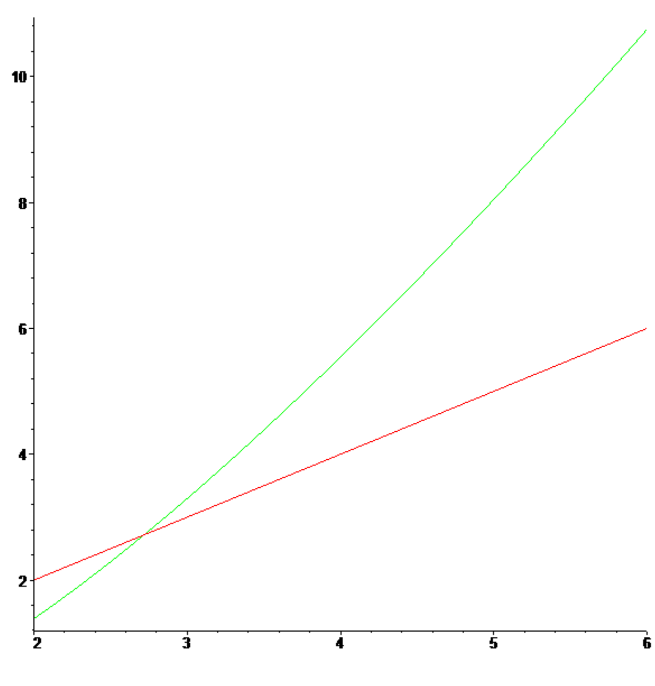
Gráficos

Basta usar o comando **plot**:

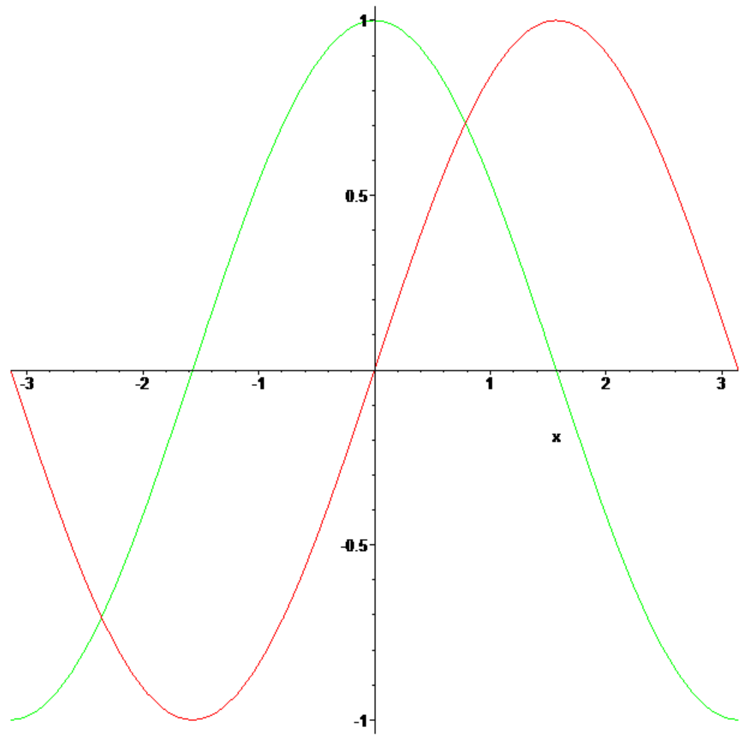
```
> plot(x^2+3, x=0..4, y=0..10);
```



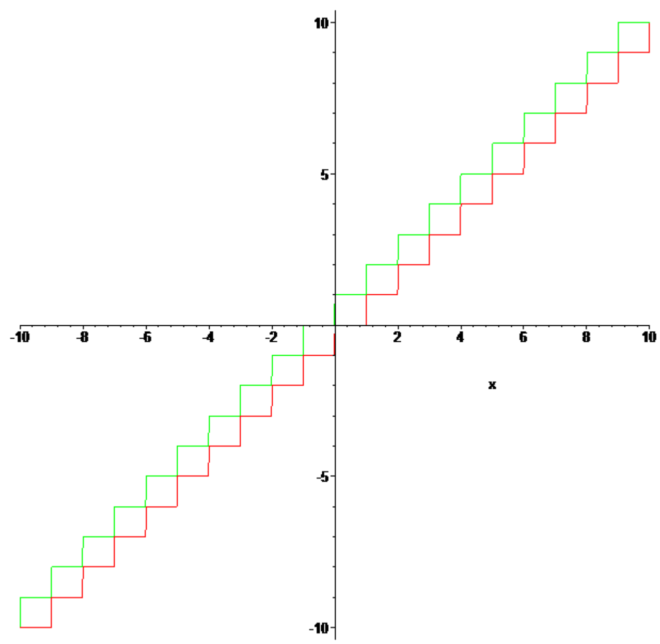

```
> plot({n,n*ln(n)}, n=2..6);
```



```
> plot({sin(x),cos(x)},x=-Pi..Pi);
```




```
> plot({floor(x), ceil(x)}, x=-10..10);
```



floor (função *floor*): característica de um número, i.e. o maior número inteiro que é menor ou igual que o número dado; **ceil** (função *ceiling*): menor número inteiro que é maior ou igual do que o número.

Exercício 8. Use os seus conhecimentos de `Maple` para averiguar rapidamente se:

(a) $f : (0,14) \to (0,14)$ definida por $f(x) = (x^2 + x + 1) \mod 15$ é injectiva. (Será sobrejectiva?)

(b) a relação constituída pelos pares (x, y) tais que $x \equiv_7 y$ no conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$ é uma função.

(c) a função $g : (0,6) \to (0,6)$ definida por $g(x) = x^2 \mod 7$ é ou não injectiva. (Será sobrejectiva?)

(d) a função $h : (0,1000) \to (0,11)$ definida por $h(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) \mod 11$ é sobrejectiva.

Trace o gráfico da função característica no intervalo $[-5, 5]$.