Contagem

1. Existem 32 computadores numa sala de aula, cada um com 24 portas. Quantas portas diferentes para um computador existem na sala?
2. Quantas cadeias de bits de comprimento sete existem?
3. Quantas funções existem de um conjunto com m elementos para um conjunto de n elementos? Quantas delas são injectivas?
4. Qual é o valor de k após o seguinte algoritmo ter sido executado?

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    for i_2 := 1 to n_2
        ⋮
          for i_m := 1 to n_m
             k := k + 1
```

5. Numa determinada linguagem de computação, o nome das variáveis é uma palavra com um ou dois caracteres alfanuméricos, onde as letras maiúsculas e minúsculas não são distinguidas (um caracter *alfanumérico* é uma das 26 letras do alfabeto inglês ou um dos 10 algarismos). Além disso, o nome deve começar por uma letra e deve ser diferente de cinco cadeias de dois caracteres reservados para comandos de programação. Com quantas variáveis diferentes poderemos trabalhar?
6. A *password* de um computador é formada por uma letra seguida de 3 ou 4 algarismos. Qual é o número total de *passwords* que é possível formar?
7. Dizemos que um número é *equilibrado* caso um dos seus algarismos seja a média dos outros. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?
8. A um número como 19977991, que lido da direita para a esquerda, coincide com o número original, chama-se *capicua*. Quantas capicuas de 7 algarismos, com 4 algarismos diferentes, existem?
9. Chamemos *número simples* a um número inteiro positivo formado apenas pelos algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números simples existem, inferiores a um milhão?
10. De quantas maneiras podemos seleccionar 4 jogadores, a partir de uma equipa de 10 jogadores, para jogarem 4 jogos de ténis, sendo os jogos ordenados?
11. Calcule o número de maneiras diferentes de escolher 3 meses do ano como os meses de saldos numa loja.
12. Calcule o número de equipas de 8 jogadores que é possível formar com 3 portugueses e não mais do que 2 brasileiros, escolhidos entre 10 portugueses, 10 brasileiros e 10 espanhóis.
13. Dados n pontos numa circunferência, quantos polígonos de p lados ($p \leq n$) é possível formar com tais pontos?
14. Quantos números de 3 algarismos se podem formar com os algarismo 1,2,3,4,5,6:
    (a) sem repetição de algarismos?
    (b) podendo haver repetição de algarismos?
    (c) de modo que sejam pares?

(d) de modo que sejam pares e constituídos por algarismos distintos?

15. Se os conjuntos A e B têm, respectivamente, 6909 e 1107 elementos, e $A \cap B$ tem 225 elementos, quantos elementos possui $A \cup B$?

16. Calcule o cardinal do conjunto S, sabendo que os conjuntos $S \cup T$, T e $S \cap T$ têm, respectivamente, 36, 19 e 8 elementos.

17. O Clube Pitágoras tem 100 sócios do sexo feminino e 80 sócios do sexo masculino. O Clube Euclides tem 80 sócios do sexo feminino e 100 sócios do sexo masculino. Existem exactamente 60 raparigas que são sócias de ambos os clubes. O número total de pessoas que pertencem a pelo menos um dos clubes é igual a 230.

    Quantos rapazes são sócios do Clube Pitágoras e não são sócios do Clube Euclides?

18. Qual é a probabilidade de um inteiro entre 1 e 10000, escolhido ao acaso, não ser quadrado perfeito nem cubo perfeito ?

19. Uma pessoa escreveu 5 cartas diferentes a 5 amigos e fechou-as nos envelopes sem reparar que os envelopes já tinham os endereços escritos. Qual é a probabilidade de:

    (a) nenhuma carta corresponder ao envelope onde foi colocada?

    (b) exactamente 2 amigos receberem as cartas que lhes eram destinadas?

20. Seja $a_{n+1} - ca_n = 0$ $(n \geq 0)$ uma relação de recorrência. Sabendo que $a_3 = 153/49$ e $a_5 = 1377/2401$, determine c.

21. Suponha que tem um robô capaz de dar passos de um ou de dois metros. Exprima por meio de uma relação de recorrência o número p_n de modos diferentes que o robô possui para percorrer n metros.

22. Uma pessoa deposita 1000 Euros numa conta a prazo, com juro anual de 4%.

    (a) Determine uma relação de recorrência para o valor existente na conta ao fim de n anos.

    (b) Determine uma fórmula explícita para esse valor.

    (c) Quanto dinheiro terá a conta ao fim de 100 anos ?

23. Recorde que a sucessão de Fibonacci se define recursivamente por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geq 2$.

    (a) Determine $f(3)$.

    (b) Mostre que para todo o $n \geq 1$ se verifica a igualdade $f(4n) = 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$.

    (c) Prove, usando o princípio de indução matemática, que $f(4n)$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

24. Determine a solução de cada uma das seguintes relações de recorrência:

    (a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0$, $n \geq 0$.

    (b) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_1 = 5$.

    (c) $a_n = 7a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_2 = 98$.

    (d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$.

    (e) $a_n^3 = 7a_{n-1}^3$, $n \geq 1$, $a_0 = 3$.

    (f) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

    (g) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 12$.

25. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de sequências ordenadas com elementos iguais a 1 ou 2 cuja soma é igual a n. Determine a_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.