

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.
 A não justificação será penalizada.
 Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

Duração: 2h30m

1. Selecciona a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes
 (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa):

V **F**

(a) De $p \vee q$ e $\neg p$ deduz-se q .

--	--

(b) De $p \vee q$ e q deduz-se $\neg p$.

--	--

(c) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

--	--

(d) De $\neg(p \wedge q)$ deduz-se $\neg q$.

--	--

(e) De $p \vee q$ e $q \rightarrow r$ deduz-se $p \vee r$.

--	--

2. Prove que $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $q \rightarrow (p \vee r)$ são logicamente equivalentes,

(a) usando uma tabela de verdade;

(b) usando equivalências lógicas conhecidas.

3. Considere o algoritmo seguinte que permite calcular o valor da função *soma* em cada inteiro positivo n dado.

```

procedure soma (n: inteiro positivo)
  soma := 0   {valor inicial da soma}
  for i := 1 to n
    for j := 1 to i
      soma := soma - 2;
  
```

(a) Calcule $soma(3)$.

(b) Determine $soma(n)$.

4. Prove que para todos os números naturais $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$.

5. Cinco rapazes e cinco raparigas vão sentar-se numa fila (dez lugares) da sala de aula. Indique de quantas maneiras se podem sentar, para cada uma das seguintes condições:

(a) Os rapazes sentam-se todos nos cinco lugares mais à esquerda.

(b) Nenhum par de rapazes se senta em lugares contíguos.

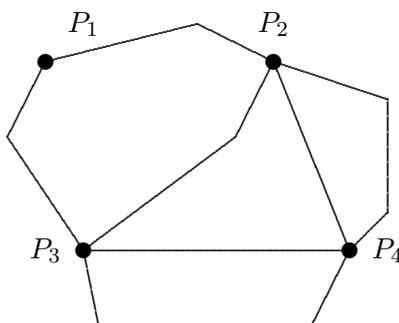
(c) O Francisco e a Francisca têm de ficar lado a lado.

6. Considere um baralho normal de 52 cartas.
- Quantas mãos de duas cartas existem?
 - Quantas mãos de duas cartas com o mesmo valor existem?
 - Quantas mãos de quatro cartas em que exactamente três são do mesmo naipe existem?
7. A seguinte “prova” por indução sobre n de que $3^n = 1$ para todo o inteiro $n \geq 0$ tem um erro:

Passo inicial:	$3^0 = 1$ é verdadeiro por definição de 3^0 .
Hipótese de indução:	$3^k = 1$ para todo o inteiro $0 \leq k \leq n$.
Passo indutivo:	$3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$.

Em qual das seguintes hipóteses consiste o erro? (Justifique sucintamente.)

- A formulação da hipótese de indução está errada.
 - A igualdade $3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}}$ não se verifica para todos os números naturais.
 - A igualdade $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)}$ não se verifica para todos os números naturais.
 - O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 1$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ a partir da hipótese de indução.
 - O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 2$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ da hipótese de indução.
8. Use o Princípio da Inclusão-Exclusão para calcular quantos inteiros entre 1 e 1000:
- não são divisíveis por 2.
 - não são divisíveis por 2 e por 5.
 - não são divisíveis por 2, por 5 e por 11.
9. Resolva a relação de recorrência $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$ ($n \geq 2$) com condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.
10. Este ano o cortejo da Queima das Fitas deve percorrer uma só vez todas as ruas da área representada, partindo de uma das praças P_1, P_2, P_3 ou P_4 e regressando à mesma praça.



- Diga se é possível encontrar um percurso nestas condições. Se a sua resposta for afirmativa, copie a figura para o seu papel, e represente-o.
- Determine a matriz de adjacências do grafo.