Ano lectivo 2008/09 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.^{as} Eng. Informática, Comunicação e Multimédia 16/01/09

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. A não justificação será penalizada. Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

Duração: 2h30m

---

1. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa):

	V	**F**
(a) De $\neg p \vee q$ e p deduz-se q.		
(b) De $p \leftrightarrow q$ e $\neg p$ deduz-se $\neg q$.		
(c) De $p \wedge q$ deduz-se p.		
(d) De $p \vee \neg q$ deduz-se p.		
(e) De $\neg(p \rightarrow q)$ deduz-se $p \wedge \neg q$.		

2. Prove que

$$\begin{array}{c} a \vee c \\ b \vee \neg c \\ \hline \therefore \quad a \vee b \end{array}$$

   (a) usando uma tabela de verdade;

   (b) por contradição, isto é, assuma $\neg(a \vee b)$ e mostre que daí resulta uma contradição com as premissas.

3. Exprima as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

   (a) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 2)$.

   (b) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{3!}$ (20 parcelas).

   (c) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$.

   (d) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + 7^3$.

   (e) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \cdots + \frac{n+1}{2n}$.

   (f) $n - \frac{n+1}{2!} + \frac{n+2}{4!} - \frac{n+3}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2n}{(2n)!}$.

4. Calcule

$$\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} \right).$$

5. Quantas soluções da congruência $2x \equiv_7 5$ existem no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$?

6. Considere o seguinte plano de atribuição de números de telefone de uma determinada companhia telefónica internacional: cada número contém um código para o país (com 1, 2 ou 3 algarismos), seguido de um número com 10 algarismos, da forma

$$NXX - NXX - XXXX$$

(onde N é um algarismo diferente de 0 e de 1 e X é um algarismo qualquer). Quantos números estão disponíveis por este sistema?

v.s.f.f.

7. Calcule $\overline{C}(5,2)$ e confirme o resultado listando todas as combinações com repetição de comprimento 2 que podem ser formadas com as letras a, b, c, d, e.

8. No sistema Braille, um símbolo (letra minúscula, sinal de pontuação, sufixo, etc.) é dado aumentando o tamanho de pelo menos um dos pontos na grelha de 6 pontos mostrada na figura (a) abaixo. Por exemplo, a figura (b) mostra a representação da letra "c" (os pontos nas posições 1 e 4 são aumentados). As figuras (c) e (d) mostram as representações das letras "m" e "t", respectivamente. O artigo definido "o" está representado na figura (e) enquanto o sufixo "tor" está em (f). Finalmente o sinal de ponto e vírgula é dado na figura (g) (os pontos nas posições 2 e 3 são maiores).

1 · · 4	● ●	● ●	· ●	· ●	· ●	· ·
2 · · 5	· ·	· ·	● ●	● ·	● ·	● ·
3 · · 6	· ·	● ·	● ·	● ●	· ●	● ·
(a)	(b) "c"	(c) "m"	(d) "t"	(e) "o"	(f) "tor"	(g) ";"

   (a) Quantos símbolos diferentes poderemos representar no sistema Braille?

   (b) Quandos desses símbolos são representados por exactamente 3 pontos maiores?

   (c) Quantos símbolos têm um número par de pontos maiores?

9. Prove, usando o método de indução matemática, que $n! < n^n$ para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$.

10. Para $n \geq 0$, seja a_n o número de maneiras de uma sequência de números 1 e 2 somar n. Por exemplo, $a_3 = 3$ porque as sequências $(1,1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ são as únicas que somam 3. Encontre e resolva uma relação de recorrência para a_n.

11. Considere um grafo simples conexo $G = (V, A)$ com 5 vértices, cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Qual é a sequência de graus dos vértices de G?

   (b) Existem caminhos $v_4 - v_5$ de comprimento 2?

   (c) Mostre que G não é euleriano. E é semi-euleriano? (isto é, tem um caminho euleriano aberto?)