Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 1h **Teste 4A** 17/12/08

SOLUÇÕES

---

1. Um teste de escolha múltipla contém 10 questões, havendo 4 possibilidades de resposta para cada questão.

   (a) De quantas maneiras distintas pode um aluno responder ao teste, se for obrigado a responder a todas as questões? R.: 4^{10}

   (b) E se puder deixar respostas em branco? R.: 5^{10}

2. Determine o número de elementos da união $A \cup B \cup C$ de três conjuntos, com 100 elementos cada, se:

   (a) os conjuntos forem disjuntos dois a dois. R.: 300

   (b) existirem 50 elementos comuns a cada par de conjuntos e nenhum elemento na intersecção dos três. R.: 150

   (c) existirem 50 elementos comuns a cada par de conjuntos e 25 elementos na intersecção dos três. R.: 175

3. Calcule:

   (a) $C(11, 4)$. R.: 330

   (b) O coeficiente de a^4b^7 no desenvolvimento de $(a+b)^{11}$. R.: 330

   (c) $\overline{C}(12, 2)$. R.: 78

   (d) O número de soluções inteiras não negativas (para x_1, x_2, x_3) da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. R.: 78

4. (a) Num determinado algoritmo, o valor de uma variável s vai variando de acordo com a seguinte regra: em cada passo n ($n \geq 2$), o valor de s (que denotamos por s_n) é igual ao dobro do valor de s dois passos antes menos o valor de s no passo anterior. Sabendo que $s_0 = 1$ e $s_1 = 2$, enumere os primeiros 6 valores da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

   R.: $1, 2, 0, 4, -4, 12.$

   (b) Determine (de forma explícita) o valor de s_n para qualquer n.

   R.: $s_n = \dfrac{4 - (-2)^n}{3}$

   (c) E se $s_0 = s_1 = 1$, qual é o valor de s_n?

   R.: $s_n = 1$

RESOLUÇÃO

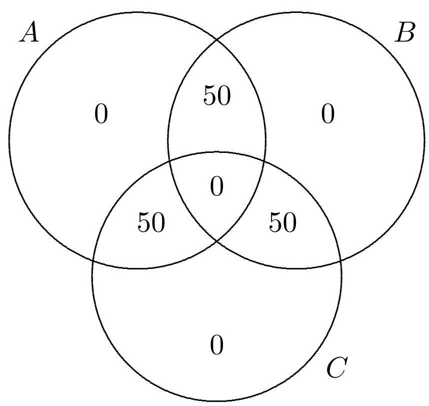
1(a) Havendo quatro possibilidades de resposta a cada questão, pelo Princípio da Multiplicação cada aluno tem a possibilidade de responder ao teste de $\overline{P}(4,10) = 4^{10}$ maneiras distintas.

(b) Podendo também responder em branco, haverá 5 possibilidades de resposta a cada questão, pelo que o número total é agora $\overline{P}(5,10) = 5^{10}$.

2(a) Como os conjuntos são disjuntos dois a dois, pelo Princípio da Adição tem-se

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| = 100 + 100 + 100 = 300.$$

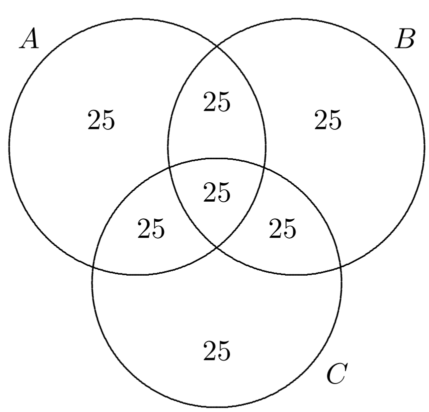
(b) Neste caso a situação só pode ser a seguinte (repare que se trata de um caso limite: não podem ser mais de 50 elementos comuns a cada par de conjuntos pois 50+50=100):



Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 300 - 50 - 50 - 50 + 0 = 150.$$

(c) Neste caso a situação é a seguinte:



Então, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 300 - 50 - 50 - 50 + 25 = 175.$$

3(a) $C(11,4) = \frac{11!}{7!\times 4!} = \frac{11\times 10\times 9\times 8}{4!} = 330.$

(b) Pela fórmula do Binómio de Newton,

$$(a+b)^{11} = \sum_{i=0}^{11} C(11,i) a^i b^{11-i}.$$

Então o coeficiente de a^4b^7 é igual a $C(11,4) = 330$.

(c) $\overline{C}(12,2) = C(12+2-1,2) = C(13,2) = \frac{13!}{11!\times 2!} = \frac{13\times 12}{2} = 78.$

(d) O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0)$, é igual a

$$\overline{C}(3,11) = C(3+11-1,11) = C(13,11) = \frac{13\times 12}{2} = 78.$$

De facto, é evidente que a cada conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ de inteiros positivos ou nulos satisfazendo $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ podemos fazer corresponder a combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, 11 a 11,

$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{x_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{x_2 \text{ vezes}}, \underbrace{a_3, a_3, \ldots, a_3}_{x_3 \text{ vezes}}\};$$

por outro lado, qualquer combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, 11 a 11, contém, para cada i, x_i elementos iguais a a_i, e $x_1 + x_2 + x_3 = 11$.

4(a) Como $s_n = 2s_{n-2} - s_{n-1}$ então os primeiros 6 valores da sequência são: $1, 2, 0, 4, -4, 12$.

(b) A equação característica desta relação de recorrência é igual a $x^2 + x - 2 = 0$, que tem raízes $x = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$. Portanto,

$$s_n = c_1 1^n + c_2(-2)^n = c_1 + c_2(-2)^n.$$

Das condições iniciais tiramos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \\ c_1 + c_2(-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4}{3} \\ \\ c_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Finalmente,

$$s_n = \frac{4}{3} - \frac{(-2)^n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Neste caso,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \\ c_1 + c_2(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

pelo que

$$s_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Alternativa: Neste caso, $s_2 = 2 - 1 = 1 = s_1 = s_0$ pelo que, imediatamente, $s_n = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

As resoluções dos restantes testes são análogas:

SOLUÇÕES

TESTE 4B

1(a) 450

(b) 265

(c) situação limite: 225

2(a) 5^9

(b) 6^9

3(a) $1, 1, 3, 5, 11, 21$

(b) $s_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$

(c) $s_n = (-1)^n$

4(a) 120

(b) 120

(c) 66

(d) 66

TESTE 4C

1(a) 300

(b) situação impossível pois $60 + 60 > 100$

(c) 150

2(a) 4^{10}

(b) 5^{10}

3(a) 330

(b) 330

(c) 78

(d) 78

4(a) $1, 2, 0, 4, -4, 12$

(b) $s_n = \dfrac{4 - (-2)^n}{3}$

(c) $s_n = 1$

TESTE 4D

1(a) 5^9

(b) 6^9

2(a) 450

(b) 320

(c) 300

3(a) $1, 1, 3, 5, 11, 21$

(b) $s_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$

(c) $s_n = (-1)^{n+1}$

4(a) 120

(b) 120

(c) 66

(d) 66