Lógica proposicional

1. Quais das seguintes frases são proposições?
   (a) Isto é verdade?
   (b) João é um nome.
   (c) 8 é um número ímpar.
   (d) 8 é um número par.
   (e) Esta cor é bonita.
2. Indique os valores lógicos das proposições seguintes:
   (a) 7 é um número primo.
   (b) Lisboa é uma cidade.
   (c) Portugal é uma cidade.
3. Indique quais das seguintes proposições são atómicas e quais são compostas.
   (a) O Frederico é alto, e o Joaquim também.
   (b) O carro acidentado era azul ou verde.
   (c) O carro acidentado era meu.
   (d) Se fores ao bar, então eu vou ao bar.
4. Usando os símbolos r e f para "Manuel é rico" e "Manuel é feliz", respectivamente, escreva as seguintes afirmações na forma simbólica.
   (a) Manuel é rico.
   (b) Manuel é rico e feliz.
   (c) Manuel é rico ou feliz.
   (d) Se Manuel é rico, então é feliz.
5. Identifique todas as proposições atómicas nas frases seguintes e represente-as por símbolos p, q, r, etc. Em seguida escreva as frases sob a forma de cálculo proposicional.
   (a) Se a Maria está no ginásio, então a Marta também está no ginásio.
   (b) O carro do Rui é vermelho ou castanho.
   (c) Se te levantares às sete horas, chegarás a tempo.
   (d) Chegarás a tempo se e só se te levantares às sete horas.
   (e) Ele virá se tu o avisares.
   (f) É suficiente que o João tenha 9,5 valores para que passe.
   (g) Amanhã vou de autocarro ou de táxi.
   (h) Amanhã vou de autocarro se ele parar no Rossio, ou vou de táxi se tiver dinheiro.
   (i) Se acabar o meu trabalho então vou para a praia caso faça bom tempo.

6. Use os símbolos proposicionais p e q para formalizar os seguintes argumentos lógicos:

   (a) Se 10 é um número primo, 10 não pode ser igual a 2 vezes 5. 10 é igual a 2 vezes 5. Logo, 10 não pode ser um número primo.

   (b) Se chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Se não chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Consequentemente, os agricultores queixam-se.

   (c) O António almoça na cantina ou o António almoça em casa. O António não almoça na cantina. Logo, o António almoça em casa.

7. Escreva cada uma das seguintes afirmações na forma "se p então q".

   (a) Chove sempre que o vento sopra de Sul.

   (b) É necessário caminhar 20 quilómetros para chegar ao topo do Everest.

   (c) Toca nesse bolo e arrepender-te-ás.

   (d) As rosas florirão se estiver calor durante uma semana.

   (e) A garantia está activa só se tiveres comprado o computador há menos de um ano.

   (f) Para teres 20 nesta disciplina, é necessário que aprendas a resolver problemas de matemática discreta.

   (g) Para ser aprovado na disciplina, é suficiente obter 10 valores no exame.

8. Coloque parênteses nas expressões seguintes de tal modo que sejam indicadas as regras de prioridade estabelecidas para os conectivos envolvidos.

   (a) $p \wedge q \wedge r \rightarrow p$.

   (b) $p \wedge r \vee q \rightarrow \neg r$.

   (c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow \neg q \vee p_1$.

   (d) $p \rightarrow q \rightarrow \neg q \rightarrow \neg q$.

9. Escreva as tabelas de verdade para:

   (a) $\neg(\neg p \vee \neg q)$.

   (b) $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$.

   (c) $(p \vee (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$.

   (d) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow p)$.

   (e) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \neg p$.

10. O conectivo lógico conhecido por "ou exclusivo", e denotado por $\dot{\vee}$, é definido pela tabela de verdade

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   (a) Mostre que $\dot{\vee}$ é equivalente a $\neg(p \leftrightarrow q)$.

   (b) Construa a tabela de verdade para $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$.

11. Determine valores de verdade para as variáveis proposicionais p, q e r para os quais o valor de verdade da fbf $(p \vee q \rightarrow r) \wedge p \rightarrow (r \rightarrow q)$ seja falso.

12. Qual é o valor de verdade das seguintes proposições?
    (a) O número 2 é primo ou 4 é ímpar.
    (b) O número 2 não é primo e 4 é ímpar.
    (c) O número 2 é primo e 4 é ímpar.
    (d) O número 2 não é primo ou 4 é ímpar.
    (e) Se 2 não for primo então 4 é ímpar.
    (f) Se 2 não for primo então 4 é par.
    (g) Se 2 não for primo e 4 for par então $4 < 2$.
13. Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições, ou contingências.
    (a) $((p \to q) \to \neg(q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.
    (b) $((p \to q) \to q) \to q$.
    (c) $((p \to q) \to p) \leftrightarrow (q \to (q \to p))$.
    (d) $(p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p$.
14. Simplifique as expressões seguintes:
    (a) $(p \wedge \mathsf{V}) \wedge (q \wedge \mathsf{V})$.
    (b) $(r \wedge \mathsf{V}) \wedge (q \wedge \neg r)$.
    (c) $p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$.
15. Escreva a negação das proposições (a), (b), (c) e (i) do Exercício 5.
16. Prove que $\neg p \to (q \to r)$ e $q \to (p \vee r)$ são logicamente equivalentes,
    (a) usando uma tabela de verdade;
    (b) usando equivalências lógicas conhecidas.
17. Use a tabela das equivalências básicas para provar que:
    (a) $\neg((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$ é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.
    (b) $\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p$ é uma tautologia.
18. Demonstre a utilidade do método de Quine na averiguação se a fbf seguinte é uma tautologia, contradição ou contingência:
$$(p \to q) \to (p \vee r \to q \vee r).$$
19. Mostre que a fórmula $(\neg p \to q) \to (p \to \neg q)$ não é uma tautologia. Encontre fórmulas ϕ e ψ tais que $(\neg\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg\psi)$ seja uma contradição.
20. Determine expressões logicamente equivalentes às seguintes mas sem os conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$:
    (a) $(p \to q) \vee (q \to r)$.
    (b) $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow q)$.
    (c) $\neg p \to \neg q$.
21. Verifique se o argumento seguinte está correcto (isto é, se a conclusão é logicamente implicada pela conjunção das hipóteses).

    Se o orçamento não for cortado, uma condição necessária e suficiente para os preços permanecerem estáveis é que os impostos sejam aumentados. Os impostos serão aumentados somente se o orçamento não for cortado. Se os preços permanecerem estáveis, os impostos não serão aumentados. Portanto os impostos não serão aumentados.

22. Decida se $p \vee \neg s$ é consequência tautológica das premissas $p \vee \neg q$, $q \vee r$ e $r \vee s$.

23. Encontre uma fórmula restrita (isto é, contendo apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$) correspondente à função de verdade $f(p, q, r)$ dada pela tabela

p	q	r	$f(p,q,r)$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	F	V
F	F	F	F

24. Seja f a função lógica dada pela tabela

p	q	r	$f(p,q,r)$
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	V

 (a) Determine a forma normal disjuntiva de f.
 (b) Determine a forma normal conjuntiva de f.

25. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos de conectivos é completo para o cálculo proposicional:
 (a) $\{\neg, \rightarrow\}$.
 (b) $\{\neg, \wedge\}$.
 (c) $\{\neg, \vee\}$.

26. Prove as regras de inferência seguintes, usando tabelas de verdade.
 (a) Modus ponens.
 (b) $a \rightarrow b, \neg a \rightarrow b \models b$.

27. Mostre que $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia e use esta tautologia para provar que

$$\neg p \rightarrow \neg q, \neg\neg p \rightarrow \neg q \models \neg q.$$

28. Mostre que os seguintes argumentos são correctos, usando tabelas de verdade.
 (a) $p \vee q, \neg p \vee r \models q \vee r$.
 (b) $p \rightarrow q, p \rightarrow r \models p \rightarrow q \wedge r$.
 (c) $p, p \rightarrow q \models p \wedge q$.
 (d) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \models r$.

29. Averigue se os seguintes argumentos são válidos, indicando, para cada argumento válido, a regra de inferência que é usada.

(a) O número $\log_2 3$ é irracional se não for igual à razão de dois inteiros. Por conseguinte, como $\log_2 3$ não é igual à razão de dois inteiros, conclui-se que $\log_2 3$ é irracional.

(b) Se n é um número real tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Suponhamos que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.

(c) Se n é um número real tal que $n > 3$, então $n^2 > 9$. Suponhamos que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.

(d) A função f tem derivada nula no ponto a ou não tem derivada em a. Como f tem derivada em a, conclui-se que $f'(a) = 0$.

(e) Se durmo menos do que 7 horas por dia então trabalho muito. Se trabalho muito e durmo menos do que 7 horas por dia então estou cansado. Eu não estou cansado. Logo eu não trabalho muito.

(f) O resto da divisão de um número par por 4 é 0 ou 2. Assim, se o resto da divisão de um número par por 4 não é 0, então é 2.

(g) Se n é um número primo então é ímpar ou igual a 2. Logo, se n é um número par diferente de 2, concluímos que n não é primo.

30. A, B e C compareceram perante um tribunal, acusados de roubo. Conseguiu-se estabelecer que:

- Se A não é culpado, o culpado é B ou C.
- Se A não é culpado então C não é culpado.
- Se B é culpado então A é culpado.

Será possível decidir sobre a culpabilidade de A a partir destes factos? Se sim, determine se A é ou não culpado.