

Lógica elementar

Tarski World

1. Um mundo de Tarski (tridimensional) consiste num tabuleiro de xadrez (8×8) juntamente com figuras geométricas diversas: tetraedros, cubos, e octaedros, dispostas nas casas do tabuleiro. Relativamente a estas figuras consideram-se os seguintes predicados unários, binários e ternários, que descrevem o tamanho, o tamanho relativo e posição relativa:

Predicados unários

Sentença atómica	Interpretação
$Tet(a)$	a é um tetraedro
$Cube(a)$	a é um cubo
$Dodec(a)$	a é um dodecaedro
$Small(a)$	a é pequeno
$Medium(a)$	a é médio
$Large(a)$	a é grande

Predicados binários

Sentença atómica	Interpretação
$SameSize(a, b)$	a tem o mesmo tamanho que b
$SameShape(a, b)$	a tem a mesma forma que b
$Larger(a, b)$	a é maior que b
$Smaller(a, b)$	a é menor que b
$SameCol(a, b)$	a está na mesma coluna que b
$SameRow(a, b)$	a está na mesma linha que b
$Adjoins(a, b)$	a e b estão localizados em casas adjacentes (mas não na diagonal)
$LeftOf(a, b)$	a está numa coluna à esquerda de b
$RightOf(a, b)$	a está numa coluna à direita de b
$FrontOf(a, b)$	a está numa linha à frente de b
$BackOf(a, b)$	a está numa linha atrás de b

Predicados ternários

Sentença atómica	Interpretação
$Between(a, b, c)$	a, b e c estão na mesma coluna, linha ou diagonal, e a está entre b e c .

- (a) Para se familiarizar com o Tarski World abra-o e carregue os ficheiros Wittgenstein's World e Wittgenstein's Sentences (na pasta TW Exercises). Nestes ficheiros verá um mundo de blocos geométricos e uma lista de sentenças atómicas (algumas delas têm comentários). Percorra essa lista e tente calcular mentalmente o correspondente valor lógico nesse mundo. Use o botão **Verify** para verificar se a sua resposta está correcta ou não. Se

ficar surpreendido por alguma resposta, tente ver porque errou, comparando a sua interpretação do predicado com a definição exacta do predicado.

- (b) Em seguida, mude o mundo de Wittgenstein de diversas maneiras, alterando os objectos e as suas posições, observando o que acontece ao valor lógico das diversas sentenças.
 [Objectivo: ajudá-lo a memorizar a interpretação de cada um dos predicados do **Tarski World**; só deverá avançar depois de dominar bem a lista de predicados e as suas interpretações.]

2. Determine o valor lógico das afirmações seguintes relativas ao mundo

				★ <i>a</i>			
							▽
		▽ <i>d</i>					
▽			□ <i>c</i>			★ <i>b</i>	
	□						
				□			★
		▽					★

Estrela Pequena: ★
 Estrela Média: ★
 Estrela Grande: ★

Quadrado Pequeno: □
 Quadrado Médio: □
 Quadrado Grande: □

Triângulo Pequeno: ▽
 Triângulo Médio: ▽
 Triângulo Grande: ▽

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) $Estrela(a) \wedge \neg Grande(a)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) $\forall x(\neg Estrela(x) \rightarrow Quadrado(c))$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) $\exists y \forall x (Triangulo(x) \rightarrow MaisPequeno(x, y))$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) $\forall x (Pequeno(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge MesmaColuna(x, y)))$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

3. Construa um mundo no qual as seguintes sentenças sejam simultaneamente verdadeiras:
Tet(a), *Medium(a)*, *Dodec(b)*, *Cube(c)*, *FrontOf(a, b)*, *Between(a, b, c)*, $a = d$, *Larger(a, b)*, *Smaller(a, c)*, *LeftOf(b, c)*.
4. Abra os ficheiros **Lestrade's Sentences** e **Lestrade's World**. Reparará que nenhum dos objectos neste mundo tem nome. Atribua nomes aos objectos de modo que todas as sentenças na lista se tornem verdadeiras.
5. Observe a diferença entre os predicados *Larger* e *BackOf*: um determinado cubo *a* ser maior ou não que outro cubo *b* é um facto óbvio, de resposta precisa, independente da perspectiva com que olhemos para o mundo; mas saber se *a* está atrás de *b* já depende da perspectiva: se rodarmos o mundo 90°, a resposta poderá mudar.
- Abra os ficheiros **Austin's Sentences** e **Wittgenstein's World**.

(a) Determine o valor lógico das sentenças neste mundo e confira que são os seguintes:

	Original	Rodado 90°	Rodado 180°	Rodado 270°
1.	F			
2.	F			
3.	V			
4.	F			
5.	V			
6.	F			

(b) Rode o mundo 90° e torne a avaliar as sentenças, juntando os resultados à tabela. Repita o processo até dar uma volta completa.

(c) Junte uma sétima sentença à lista com o seguinte padrão: V F V F .

(d) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com o padrão F V F F ?

(e) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com exactamente três V ?

6. Para simplificar, representaremos um mundo de Tarski na folha de papel (bidimensional) num tabuleiro de xadrez (8 × 8) com quadrados (representarão os cubos), triângulos (representarão os tetraedros), e estrelas (representarão os dodecaedros), dispostos nas casas do tabuleiro¹. Por exemplo:

O mundo de Wittgenstein

	□ <i>d</i>			★ <i>e</i>			▽ <i>f</i>
▽			□ <i>c</i>			★	
	▽ <i>a</i>			□ <i>b</i>			★

(a) Quais das sentenças seguintes são verdadeiras no mundo de Wittgenstein ?

1. $Triângulo(f) \wedge Pequeno(f)$.
2. $Triângulo(f) \wedge Grande(f)$.
3. $Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.
4. $Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$.
5. $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.

¹Identificaremos também os predicados pelo seu nome em português; para *Between(a, b, c)* usaremos $B(a, b, c)$.

6. $\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Grande}(f)$.
7. $\neg(\text{Triângulo}(f) \wedge \text{Pequeno}(f))$.
8. $\neg(\text{Triângulo}(f) \wedge \text{Grande}(f))$.
9. $\neg(\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Pequeno}(f))$.
10. $\neg(\neg\text{Triângulo}(f) \wedge \neg\text{Grande}(f))$.
11. $\text{Esquerda}(a, c) \vee \text{Esquerda}(c, b) \vee \neg B(c, a, b)$.
12. $\neg\neg(\text{Acima}(e, b) \wedge \neg\text{Abaixo}(c, b))$.
13. $\text{Acima}(d, a) \wedge \text{Esquerda}(d, e) \wedge \text{Abaixo}(b, e) \wedge B(c, d, b)$.
14. $\text{MaisPequeno}(c, e) \vee \neg(\text{Quadrado}(a) \vee \text{Quadrado}(d))$.
15. $\neg(\neg\text{Estrela}(e) \vee \neg\neg\text{Triângulo}(f))$.

(b) Qual é o número máximo de sentenças que pode tornar verdadeiras num só mundo mudando o tamanho ou a forma de f (ou ambos)?

7. Construa um mundo em que todas as sentenças seguintes são verdadeiras:

- (a) $\text{Dodecaedro}(a) \wedge \text{Cubo}(b)$.
- (b) $\text{Abaixo}(b, a) \wedge \text{Esquerda}(d, b) \wedge \text{Acima}(f, d) \wedge \text{Direita}(a, f)$.
- (c) $\text{Tetraedro}(c) \wedge \text{Tetraedro}(e) \wedge \text{Esquerda}(c, d)$.
- (d) $\neg\text{Esquerda}(c, e) \wedge \neg\text{Esquerda}(e, c)$.
- (e) $B(d, b, c) \wedge \neg B(d, c, a)$.
- (f) $\neg\text{Cubo}(b) \vee (\text{Cubo}(d) \wedge \text{Acima}(d, b))$.
- (g) $(\text{Pequeno}(c) \wedge \text{Abaixo}(c, b)) \vee \text{Cubo}(d)$.
- (h) $\text{Maior}(f, a) \wedge \text{Maior}(a, b)$.
- (i) $\neg(\text{MaisPequeno}(c, a) \vee \text{MaisPequeno}(a, c))$.
- (j) $\text{Maior}(d, b) \wedge \text{Maior}(f, d) \wedge \neg(\text{Maior}(e, d) \vee \text{Maior}(d, e))$.

8. Considere as premissas seguintes:

1. $\text{Tetraedro}(b)$.
2. $\text{Cubo}(c)$.
3. $\text{Maior}(c, b) \vee (b = c)$.

(a) Determine se cada uma das sentenças seguintes é consequência tautológica das premissas dadas, justificando cuidadosamente as suas respostas:

- (i) $\text{MaisPequeno}(b, c)$.
- (ii) $\text{Maior}(c, b) \vee (\text{Tetraedro}(b) \wedge b = c)$.
- (iii) $\neg(\text{Maior}(c, b) \wedge \neg\text{Maior}(c, b))$.

(b) Considerando a interpretação usual, no mundo de Tarski, dos predicados considerados, determine se a sentença

$$(\text{Tetraedro}(b) \wedge \text{Pequeno}(b)) \vee (\text{Cubo}(c) \wedge \text{Médio}(c))$$

é consequência lógica das premissas consideradas. Em caso afirmativo, justifique cuidadosamente a sua resposta. Se não for, construa um mundo — recorrendo ao software Tarski World — no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

9. Diga em que casos as “conclusões” são conseqüências lógicas das premissas. Para cada caso em que isso não aconteça, construa um mundo (isto é, um *contra-exemplo*) no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.
- Premissa: $Esquerda(a, b)$. Conclusão: $Direita(b, a)$.
 - Premissas: $Esquerda(a, b)$, $b = c$. Conclusão: $Direita(c, a)$.
 - Premissas: $Esquerda(a, b)$, $Direita(c, a)$. Conclusão: $Esquerda(b, c)$.
 - Premissas: $Trás(a, b)$, $Frente(a, c)$. Conclusão: $Frente(b, c)$.
 - Premissas: $B(b, a, c)$, $Esquerda(a, c)$. Conclusão: $Esquerda(a, b)$. (Recorde que $B(b, a, c)$ significa que b está entre a e c , na mesma fila.)
10. (a) Descreva cada uma das propriedades seguintes do mundo de Boole, com sentenças da linguagem de primeira ordem do Tarski (use os predicados referidos em exercícios anteriores):
- f não está abaixo de a .
 - f está à direita de a e à esquerda de b .
 - f está acima ou é mais pequeno do que a .
 - e e d estão ambos entre c e a .
 - Nem e nem d são maiores que c .
 - c nem é maior nem é mais pequeno do que e .
 - c é mais pequeno do que a , mas maior do que e .
 - c está abaixo de a ; além disso, é mais pequeno do que f .

O mundo de Boole

						★ f	
					▽ a		▽ b
			★ d				
		★ e					
	▽ c						

- (b) Neste mundo apenas uma das frases seguintes é verdadeira. Qual? Traduza essa frase para a linguagem da lógica de primeira ordem.
- a é pequeno ou c e d são ambos grandes.
 - d e e estão ambos acima de b .
 - d e e estão ambos acima de b e não são maiores do que ele.
 - d e c são quadrados; além disso, nenhum deles é médio.
 - Nem e nem a estão à direita de c nem à esquerda de b .

6. e não é grande ou está acima de a .
 7. c nem está entre a e b nem está abaixo deles.
 8. a e e são ambos triângulos, ou a e f são-no ambos.
 9. c está entre d e f ou é mais pequeno do que os dois.
11. Determine o valor lógico das sentenças seguintes no mundo de Wittgenstein (Exercício 10).
- (a) $(\text{Triângulo}(a) \wedge \text{Quadrado}(c)) \rightarrow \text{Estrela}(d)$.
 - (b) $\text{Quadrado}(c) \rightarrow (\text{Grande}(c) \rightarrow (\text{Quadrado}(c) \wedge \text{Grande}(c)))$.
 - (c) $\neg(\text{Triângulo}(a) \rightarrow \text{Grande}(a)) \rightarrow (\text{Triângulo}(a) \wedge \neg \text{Grande}(a))$.
 - (d) $\neg(\text{Grande}(a) \leftrightarrow \text{Pequeno}(b))$.
 - (e) $[\text{Pequeno}(c) \wedge (\text{Quadrado}(a) \vee \text{Quadrado}(d))] \leftrightarrow [(\text{Pequeno}(c) \wedge \text{Quadrado}(a)) \vee (\text{Pequeno}(c) \wedge \text{Quadrado}(d))]$.
 - (f) $\text{Quadrado}(a) \leftrightarrow (\text{Quadrado}(c) \leftrightarrow \text{Grande}(c))$.