## Raciocínio matemático, indução e recursão

1. Sejam $p$ a proposição "$n \equiv_3 1$" e $q$ a proposição "$n^2 \equiv_3 1$". A implicação $p \rightarrow q$, que é "se $n \equiv_3 1$, então $n^2 \equiv_3 1$" é verdadeira. Se $q$ é verdadeira, ou seja, $n^2 \equiv_3 1$, decorre daí que $p$ é verdadeira, isto é, que $n \equiv_3 1$?

2. Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, para as seguintes proposições $P(n)$:

   (a) $P(n)$: Se $n > 1$ então $n^2 > n$.

   (b) $P(n)$: Se $a$ e $b$ são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$.

3. Será correcto assumir que se $\neg p$ é verdadeira então $\neg q$ é verdadeira, usando o facto de que $p \rightarrow q$ é verdadeira?

4. Apresente uma prova por contradição do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então $n$ é ímpar."

5. Prove que o quadrado de um número par é par usando

   (a) uma prova directa.

   (b) uma prova por contradição.

6. Seja $n$ um inteiro. Prove a equivalência das seguintes três proposições:

   $p_1$: $n \bmod 3 = 1$ ou $n \bmod 3 = 2$.

   $p_2$: $n$ não é divisível por 3.

   $p_3$: $n^2 \equiv_3 1$.

7. Prove, por indução matemática, que, para qualquer inteiro positivo $n$:

   (a) A soma dos primeiros $n$ inteiros positivos é igual a $(n^2 + n)/2$.

   (b) $n < 2^n$.

   (c) $n^3 - n$ é divisível por 3.

   (d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

8. Para que inteiros não negativos $n$ é válida a desigualdade $2n + 3 \leq 2^n$? Justifique a sua resposta usando indução matemática.

9. Prove, usando o método de indução matemática, que $n! < n^n$ para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$.

10. Prove que para todos os números naturais $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$.

11. A seguinte "prova" por indução sobre $n$ de que $3^n = 1$ para todo o inteiro $n \geq 0$ tem um erro:

| | |
|---|---|
| Passo inicial: | $3^0 = 1$ é verdadeiro por definição de $3^0$. |
| Hipótese de indução: | $3^k = 1$ para todo o inteiro $0 \leq k \leq n$. |
| Passo indutivo: | $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$. |

Em qual das seguintes hipóteses consiste o erro? (Justifique sucintamente.)

(A) A formulação da hipótese de indução está errada.

(B) A igualdade $3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}}$ não se verifica para todos os números naturais.

(C) A igualdade $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)}$ não se verifica para todos os números naturais.

(D) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 1$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ a partir da hipótese de indução.

(E) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 2$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ da hipótese de indução.