

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. A clareza da exposição será valorizada. A não justificação será penalizada.

Na questão 3 de escolha múltipla, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação**.

Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

*Duração: 2h30m*

---

1. Indique, justificando, se a fórmula bem formada  $p \wedge r \wedge (p \vee q \rightarrow \neg r)$  é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

2. Considere as proposições

$p$  : “Eu estudo”  
 $q$  : “Passo a Estruturas Discretas”  
 $r$  : “Vou de férias para o Brasil”.

Traduza as frases seguintes usando  $p$ ,  $q$ ,  $r$  e os conectivos lógicos.

- (a) Se passar a Estruturas Discretas vou de férias para o Brasil.
- (b) Para ir de férias para o Brasil é suficiente que eu estude.
- (c) Para passar a Estruturas Discretas é necessário que eu estude.
- (d) Passo a Estruturas Discretas só se estudar.
- (e) Se passar a Estruturas Discretas, vou de férias para o Brasil se estudar.

3. Indique o valor lógico (**V**: verdade; **F**: falso) das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B em anexo.

- (a)  $Cube(a) \vee Tet(b)$ .
- (b)  $\neg(Large(b) \rightarrow Small(d))$ .
- (c)  $\exists x(Tet(x) \wedge RightOf(x, a) \wedge \neg Small(x))$ .
- (d)  $\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow Smaller(x, y))$ .
- (e)  $\exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall y(Cube(y) \rightarrow Between(y, x, b)))$ .

4. Prove, usando o método de indução matemática, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

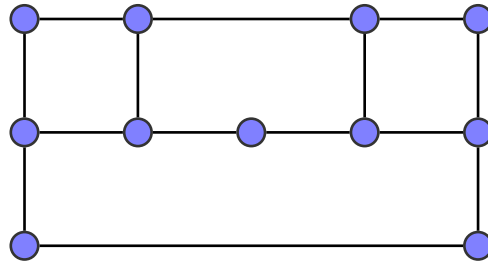
5. Calcule  $\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{20} (i - j)$ .

6. Considere a sucessão  $a_0, a_1, a_2, \dots$  definida por

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = (2a_n - 1) \pmod{7} \quad (n \geq 0).$$

Qual é o valor de  $a_{28}$ ?

7. (a) Qual o menor número de arestas que temos de acrescentar ao grafo



de forma a que seja euleriano? E semi-euleriano?

(b) Seja  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices. Para que valores de  $n$  é  $K_n$  euleriano? Prove que nesse caso o número de arestas de  $K_n$  é múltiplo de  $n$ .

8. (a) Calcule  $\text{mdc}(23, 6)$ , usando o algoritmo de Euclides.

(b) Determine todas as soluções inteiras da congruência linear  $6x \equiv_{23} 1$ .

(c) Descodifique a mensagem “HLX BEL”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (6p + 1) \pmod{23},$$

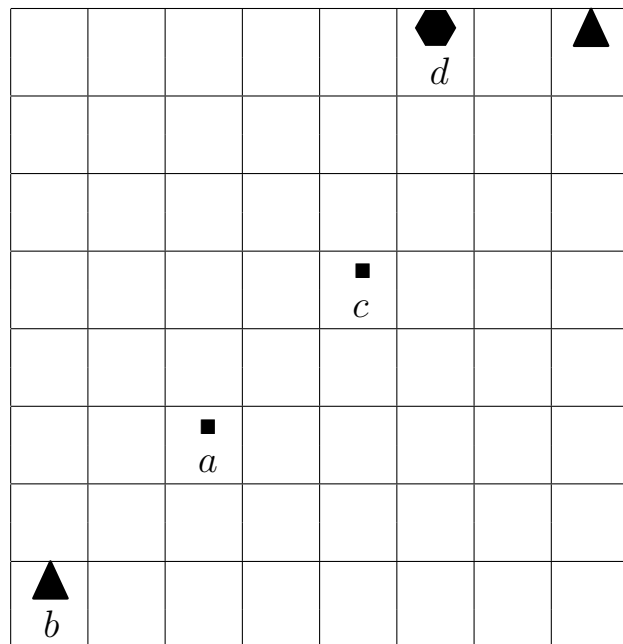
identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros  $0, 1, 2, \dots, 22$  (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

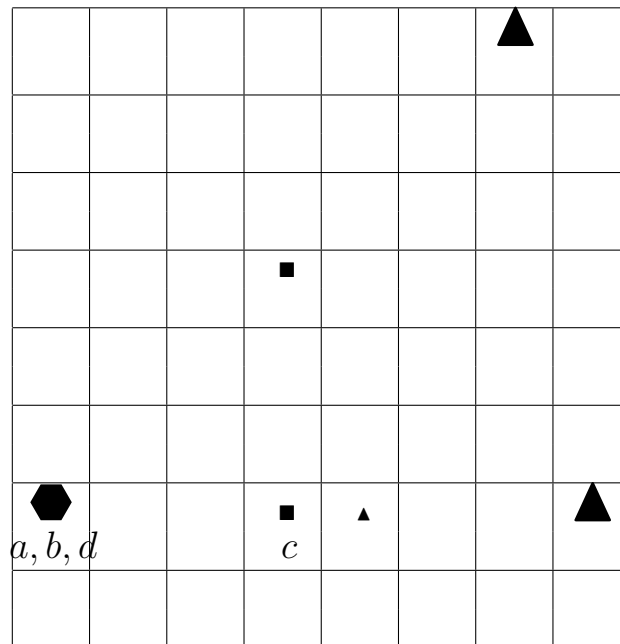
9. (a) Deduza a fórmula para o cálculo do número  $\overline{C}(n, r)$  de combinações com repetição de  $n$  elementos  $r$  a  $r$ .

(b) Calcule o número de soluções  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  em  $\mathbb{N}_0$  da equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ .

Mundo A



Mundo B



- |                     |                |                      |
|---------------------|----------------|----------------------|
| ▲ Tetraedro Pequeno | ■ Cubo Pequeno | ● Dodecaedro Pequeno |
| ▲ Tetraedro Médio   | ■ Cubo Médio   | ● Dodecaedro Médio   |
| ▲ Tetraedro Grande  | ■ Cubo Grande  | ● Dodecaedro Grande  |

*RightOf(a, b):*  $a$  está numa coluna à direita da coluna de  $b$ .

*Smaller(a, b):*  $a$  é menor que  $b$ .

*Between(a, b, c):*  $a, b$  e  $c$  estão na mesma linha, coluna ou diagonal, estando  $a$  entre  $b$  e  $c$ .