

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. A clareza da exposição será valorizada. A não justificação será penalizada.

Na questão 3 de escolha múltipla, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação**.

Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

Duração: 2h30m

1. Indique, justificando, se a fórmula bem formada $p \wedge r \wedge (p \vee q \rightarrow \neg r)$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

2. Considere as proposições

p : “Eu estudo”
 q : “Passo a Estruturas Discretas”
 r : “Vou de férias para o Brasil”.

Traduza as frases seguintes usando p , q , r e os conectivos lógicos.

- (a) Se passar a Estruturas Discretas vou de férias para o Brasil.
- (b) Para ir de férias para o Brasil é suficiente que eu estude.
- (c) Para passar a Estruturas Discretas é necessário que eu estude.
- (d) Passo a Estruturas Discretas só se estudar.
- (e) Se passar a Estruturas Discretas, vou de férias para o Brasil se estudar.

3. Indique o valor lógico (**V**: verdade; **F**: falso) das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B em anexo.

- (a) $Cube(a) \vee Tet(b)$.
- (b) $\neg(Large(b) \rightarrow Small(d))$.
- (c) $\exists x(Tet(x) \wedge RightOf(x, a) \wedge \neg Small(x))$.
- (d) $\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow Smaller(x, y))$.
- (e) $\exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall y(Cube(y) \rightarrow Between(y, x, b)))$.

4. Prove, usando o método de indução matemática, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

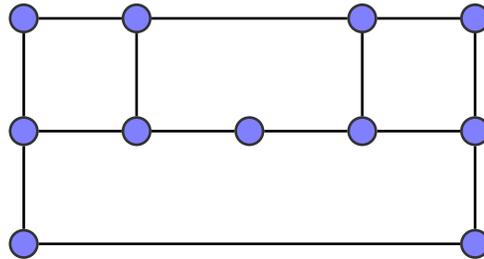
5. Calcule $\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{20} (i - j)$.

6. Considere a sucessão a_0, a_1, a_2, \dots definida por

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = (2a_n - 1) \pmod{7} \quad (n \geq 0).$$

Qual é o valor de a_{28} ?

7. (a) Qual o menor número de arestas que temos de acrescentar ao grafo



de forma a que seja euleriano? E semi-euleriano?

(b) Seja K_n o grafo completo com n vértices. Para que valores de n é K_n euleriano? Prove que nesse caso o número de arestas de K_n é múltiplo de n .

8. (a) Calcule $\text{mdc}(23, 6)$, usando o algoritmo de Euclides.

(b) Determine todas as soluções inteiras da congruência linear $6x \equiv_{23} 1$.

(c) Descodifique a mensagem “HLX BEL”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (6p + 1) \pmod{23},$$

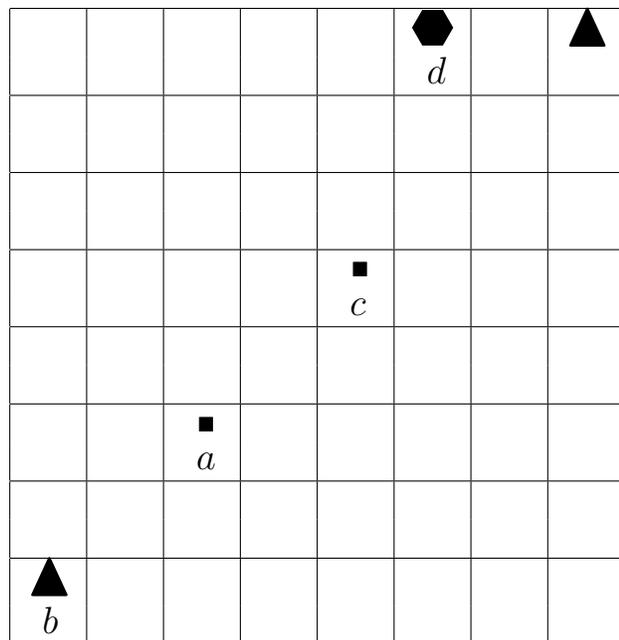
identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \dots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z	
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	

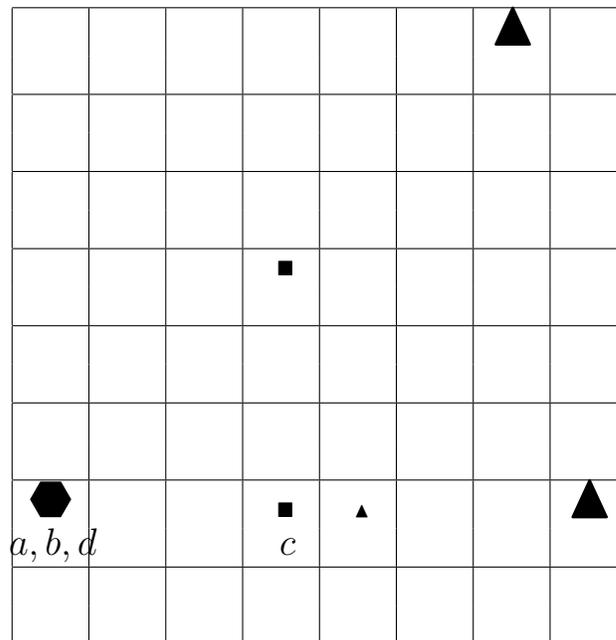
9. (a) Deduza a fórmula para o cálculo do número $\overline{C}(n, r)$ de combinações com repetição de n elementos r a r .

(b) Calcule o número de soluções (x_1, x_2, x_3, x_4) em \mathbb{N}_0 da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.

Mundo A



Mundo B



- | | | |
|---------------------|----------------|----------------------|
| ▲ Tetraedro Pequeno | ■ Cubo Pequeno | ● Dodecaedro Pequeno |
| ▲ Tetraedro Médio | ■ Cubo Médio | ● Dodecaedro Médio |
| ▲ Tetraedro Grande | ■ Cubo Grande | ● Dodecaedro Grande |

RightOf(a, b): a está numa coluna à direita da coluna de b .

Smaller(a, b): a é menor que b .

Between(a, b, c): a, b e c estão na mesma linha, coluna ou diagonal, estando a entre b e c .