*Duração: 1h30m* **Teste 1** 27/10/10

**SOLUÇÕES**

---

1. Preencha a seguinte tabela de verdade:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(r \to q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg q$ | $\to$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | F |
| V | V | F | F | V | F |
| V | F | V | F | V | F |
| V | F | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V | V |
| F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

2. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes:

   (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa) **V F**

   (a) *$r$ é uma condição suficiente para $q$. Verifica-se $r$ ou a negação de $p$. Logo, se $q$ não for verdadeiro não se verifica $p$.* | × | |

   (b) *Se não como em demasia ou faço muito exercício, então estou em forma. Eu não estou em forma. Logo como em demasia e faço pouco exercício.* | × | |

   (c) *Se consumo mais de 3000 calorias por dia, então como em demasia. Eu como em demasia. Então consumo mais de 3000 calorias por dia.* | | × |

   (d) *Se $A$ não é culpado, o culpado é $B$ ou $C$. $C$ é culpado só se $A$ é culpado. Se $B$ é culpado então $A$ é culpado. Logo $A$ é culpado.* | × | |

   (e) $$\begin{aligned}(\neg p \to q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q &\equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r) \\ &\equiv p \wedge \neg q \wedge r.\end{aligned}$$ | × | |

   Observações: A fórmula correspondente à alínea (a) é a fórmula do exercício 1, que concluímos ser uma tautologia. A alínea (d) foi resolvida nas aulas (exercício 30 da ficha TP-1). As alíneas restantes são evidentes (a falácia da alínea (c) é a seguinte: de $p \to q$ e $q$ não se pode deduzir $p$).

3. Usando o método de Quine mostre que a fórmula

$$((p \to q) \to p) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge \neg p)$$

   é uma contradição.

Basta mostrar que as fórmulas $A(p \mid \mathsf{V})$ e $A(p \mid \mathsf{F})$ são contradições:

$$A(p \mid \mathsf{V}) = ((\mathsf{V} \to q) \to \mathsf{V}) \leftrightarrow ((\mathsf{V} \to q) \wedge \mathsf{F}) \equiv (q \to \mathsf{V}) \leftrightarrow (q \wedge \mathsf{F}) \equiv \mathsf{V} \leftrightarrow \mathsf{F} \equiv \mathsf{F}.$$

$$A(p \mid \mathsf{F}) = ((\mathsf{F} \to q) \to \mathsf{F}) \leftrightarrow ((\mathsf{F} \to q) \wedge \mathsf{V}) \equiv (\mathsf{V} \to \mathsf{F}) \leftrightarrow (\mathsf{V} \wedge \mathsf{V}) \equiv \mathsf{F} \leftrightarrow \mathsf{V} \equiv \mathsf{F}.$$

4. Encontre uma sentença tautologicamente equivalente a $(p \wedge q) \rightarrow r$ que contenha apenas os conectivos proposicionais $\neg$ e $\rightarrow$ ($p$, $q$ e $r$ são sentenças atómicas). Justifique a sua resposta.

> Como, pela lei de De Morgan, $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$, então
>
> $$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r.$$

5. (a) Indique, com uma cruz, <u>todas</u> as traduções correctas (na linguagem da lógica de primeira ordem do Tarski) das seguintes sentenças:

(i) **Nem $a$ é um cubo, nem $b$ é um cubo.**

| | |
|---|---|
| ☐ $\neg(Cube(a) \wedge Cube(b))$ | ☒ $\neg Cube(a) \wedge \neg Cube(b)$ |
| ☐ $\neg Cube(a) \vee \neg Cube(b)$ | ☒ $\neg(Cube(a) \vee Cube(b))$ |

(ii) **$c$ está entre $a$ e $b$ e pelo menos um destes dois últimos objectos é um cubo.**

| | |
|---|---|
| ☐ $Between(c, a, b) \wedge Cube(a \vee b)$ | ☐ $Between(c, Cube(a), b) \vee Between(c, a, Cube(b))$ |
| ☐ $Between(c, a, b) \wedge Cube(a) \vee Cube(b)$ | ☒ $Between(c, a, b) \wedge (Cube(a) \vee Cube(b))$ |

(b) Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do Tarski:

[Dê as respostas no espaço a seguir a cada sentença, usando os predicados $Cube(x)$, $LeftOf(x, y)$, $Large(x)$, $Dodec(x)$, $FrontOf(x, y)$, $SameSize(x, y)$.]

(i) $a$ é um cubo e está à esquerda de $b$.

$Cube(a) \wedge LeftOf(a, b)$

(ii) Se $a$ e $b$ são cubos então são o mesmo objecto.

$(Cube(a) \wedge Cube(b)) \rightarrow a = b$

(iii) $a$ é grande mas não é um cubo.

$Large(a) \wedge \neg Cube(a)$

(iv) Não é verdade que exista um dodecaedro à frente de $b$.

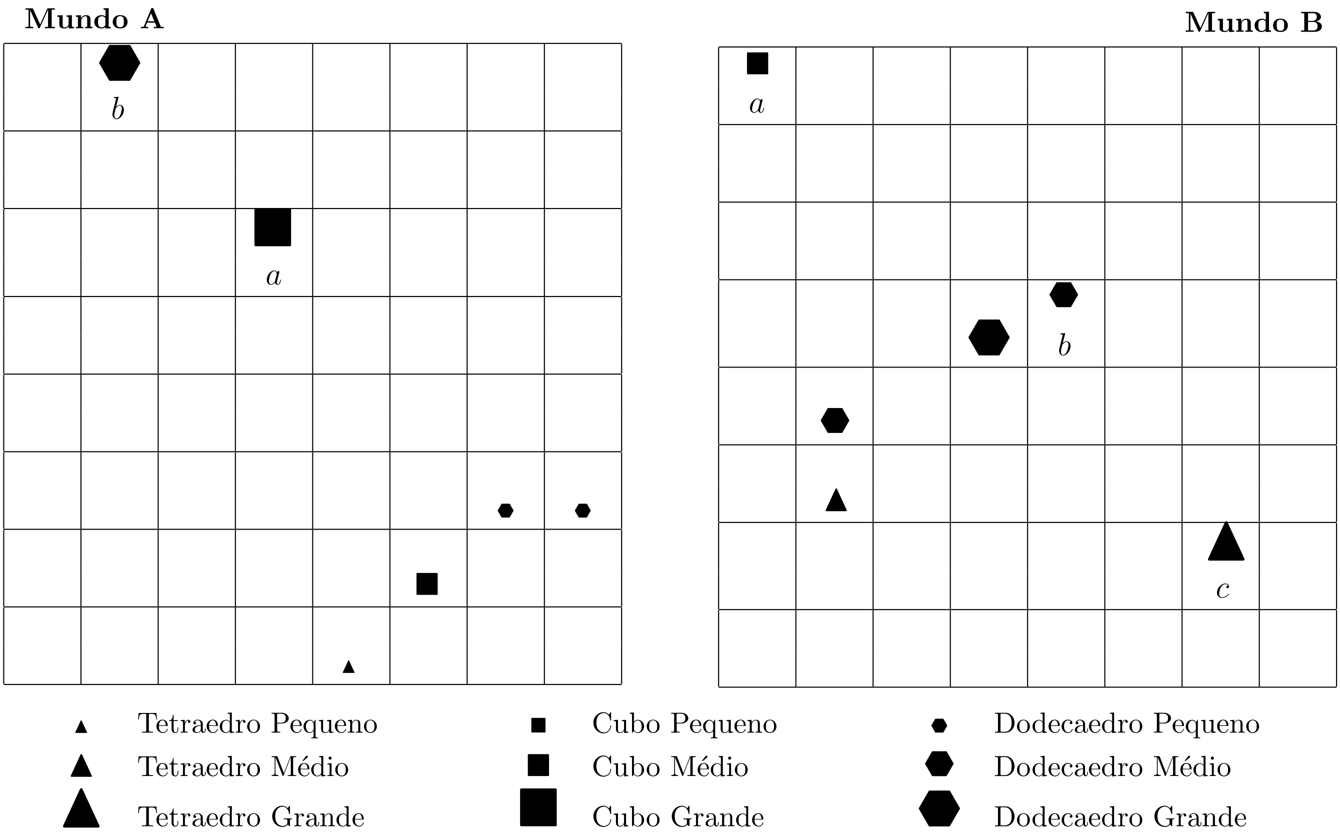
$\neg\exists x(Dodec(x) \wedge FrontOf(x, b))$

(v) Todos os cubos são do mesmo tamanho.

$\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow SameSize(x, y))$

(c) Avalie da verdade ou falsidade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo, preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

| Sentenças | Mundo A | Mundo B |
|---|---|---|
| $Large(a) \leftrightarrow Large(b)$ | V | V |
| $\exists x(Dodec(x) \wedge Small(x))$ | V | F |
| $\forall x(Cube(x) \rightarrow x = a)$ | F | V |
| $\neg\forall x((Dodec(x) \wedge Large(x)) \rightarrow BackOf(x, a))$ | F | V |
| $\exists x(Small(x) \wedge \forall z(z \neq x \rightarrow BackOf(z, x)))$ | V | F |




6. (a) Calcule $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3})$.

   (b) Prove, usando o princípio de indução matemática, que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

   para todos os números naturais $n \geq 2$.

(a) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

(b) Seja $P(n)$ a afirmação

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

É evidente que $P(2)$ é verdadeira, pois $(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Supondo por hipótese de indução que $P(n)$ é verdadeira, teremos que provar que $P(n+1)$ também é verdadeira. Mas, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1-1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

logo está provado.